国家"八五"重点图书规划项目

吴文俊 主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI

# 中国数学史大系

第七卷 明末到清中期

中国数学史大系

责任编辑 王永会
封面设计 李蓁芬

ISBN 7-303-05290-9

9 787303 052905 >

ISBN 7-303-05290-9/O・231
定价：45.00 元

国家“八五”重点图书规划项目

# 中国数学史大系

吴文俊 主编



本卷主编 李迪

## 第七卷 明末到清中期



北京师范大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

中国数学史大系 第7卷/吴文俊主编. -北京：北京师范大学出版社，1999

ISBN 7-303-05290-9

Ⅰ. 中… Ⅱ. 吴… Ⅲ. 数学史-中国-明清时代 Ⅳ. 0112

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第74953号

北京师范大学出版社出版发行

（北京新街口外大街19号 邮政编码：100875）

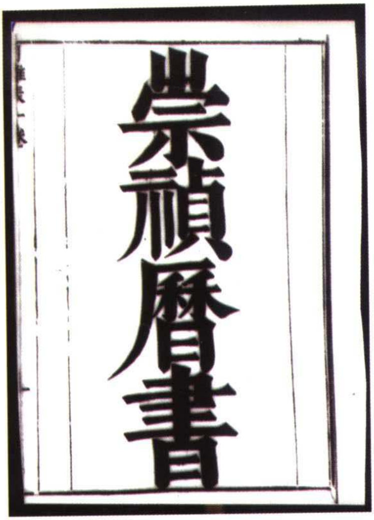
出版人：常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本：850 mm×1 168 mm 1 32 印张：17.5 字数：438千字

2000年3月第1版 2000年3月第1次印刷

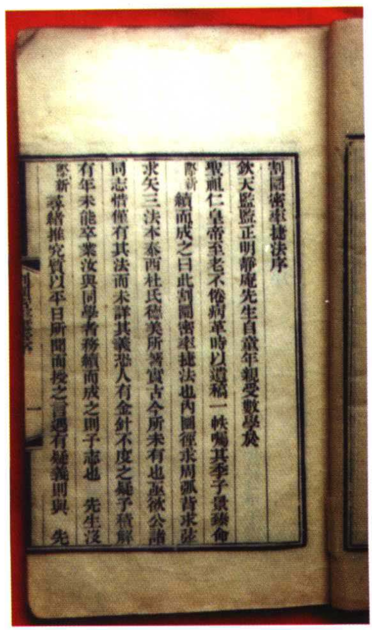
印数：1～5000 定价：45.00 元



崇禎曆書

◀《崇祯历书》书影

▼明安图《割圆密率捷法》书影



割圜密率捷法序

欽天監監正明靜庵先生自童年親受數學於

聖祖仁皇帝至老不倦病革時以遺稿一帙囑其季子景臻命

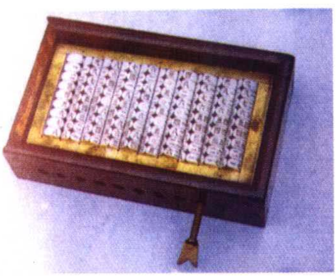
續而成之曰此割圜密率捷法也內圜徑求周弧背求弦

求矢三法本泰西杜氏德美所著實古今所未有也亟欲公諸

同志惜僅有其法而未詳其義恐人有金針不度之疑予積解

有年未能卒業汝與同學者務續而成之則予志也 先生沒

尋緒推究質以平日所聞而授之言遇有疑義則與 先



▲北京故宫博物院所藏筹式计算器

（选自《中国大百科全书·数学卷》）



▲ 北京故宫博物院所藏满文《几何原本》（代钦摄）



▲ 北京故宫博物院所藏立体几何模型（代钦摄）



▲王锡阐陈列室（位于苏州吴江市震泽镇）（选自《王锡阐纪念馆》）



▲梅文鼎故居（位于安徽宣城新田乡）（李迪摄）



▲王锡阐塑像（位于苏州吴江市震泽镇王锡阐陈列室）

（选自《王锡阐纪念馆》）



►明安图塑像（原位于内蒙古博物馆）（文浩 塑）



▲ 吴文俊院士在阅览已出版的《中国数学史大系》




▲ 1998年12月于吴文俊院士住所

左起：潘淑琴　王文涌　吴文俊　吕建生




▲ 1988年11月于安徽合肥
正前排左起：道胁义正　下平和夫　李迪（立）　钱临照　龚昇
吴文俊　杜宜谨　　　　右侧：孔国平




▲ 1996年10月，全国数学史学会理事会会议（于河北承德金爵大酒楼）
前排左起：孔国平　袁向东　胡作玄　李文林　Knobloch（列席）
Jami（列席）　孟实华（列席）　王渝生
后排左起：刘钝　何绍庚　李兆华　郭书春　李迪　罗见今　王青建

# 序

1984年间，四位中国数学史的专家教授，倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作，取名为《中国数学史大系》，这四位教授(以年事为序)是：

北京师范大学的白尚恕教授；

杭州大学的沈康身教授；

内蒙古师范大学的李迪教授；

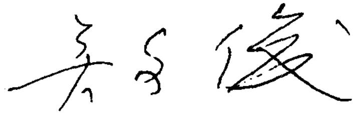
西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长，有其自身特有的思想体系与发展途径，从远古以至宋元，在很长一段时间内成为世界数学发展的主流，但自明代以来，由于政治社会等种种原因，特别如明末徐光启所指出的那样，一方面“名理之儒，土苴天下之实事”，另方面“妖妄之术，谬言数有神理”，致使中国传统数学濒于灭绝，以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断，虽然康乾之世曾有一度重视，但仅止于发掘阐释古籍而已，循至20世纪中叶，李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍，使中国古算得以不绝如缕。到70年代特别是改革开放以来，全国兴起了研习中国传统数学的高潮，论著迭出，仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著，就在10种以上，其它方面论著之多，更难以统计，这些研究使中国传统数学的固有特色，如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的 Wagner 先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于 1993 年因病逝世，白尚恕教授也于 1995 年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作，以及北师大出版社的高度热情，第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代，终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际，聊志数语，以示庆贺。



1997.12.25

# 第七卷前言

本卷的时间跨度从1600年前后起到1760年左右止，约160年，虽然时间不长，但是比较复杂。西方数学的传入，致使在中国数学史上掀起了一场波澜。究竟如何对待外来数学和中国自有的传统数学，人们议论纷纷。大体上可以分为三种观点：第一种观点欢迎和热情接受西方数学，代表人物有徐光启、薛凤作、年希尧等；第二种观点集中精力研究中国传统数学，他们有的不太了解或不愿意接受西方数学，代表人物有陈世仁、毛宗旦等；第三种观点主张中西会通，这是大多数，其中尤以梅文鼎为代表，另有王锡阐、明安图等。这三种主张，基本上是同时存在，很难明确区分先后，所以在编章的安排上颇费周折，在一些章中不得不包括这三种情况。有的人物放在二章或三章都可以，当然只好根据具体情况放在某一章中。

内容的选择，主要遵循这样两条原则：其一是尽量增加新内容，如王锡阐、李子金、杜知耕、孔林宗、陈厚耀等都列有专节，对于当时传入的西方数学著作也有较多的论述，过去不占重要地位的《视学》，本书也以一章的篇幅详加介绍，等等。其二是选择一些不同类型的代表内容列入书中，例如，魏荔彤和杨作枚是作为出版者和校补者，毛宗旦则是作为力图复原古代经典《九章算术》的人物而进入书中的。数学是一种社会产物，是由各方面的人共同努力推动它向前发展的。

这160年的中国数学史，虽不能说成果辉煌，但可以说丰富

多彩，有些成果具有独创性或达到较高水平。本卷的重点是《数理精蕴》、梅文鼎、年希尧和明安图。但由于当时中国人不懂外语，所以尽管西方数学著作源源不断地传入中国，却无人能直接阅读，结果一直收藏于耶稣教会的图书馆。西方的数学到底发展到什么程度，国人完全不了解，很多工作都是在暗中摸索，取得成就实属不易。

1600 年之前的中国数学虽然也多次与外国数学有过一定接触，但是总体上是完全独立的，有时达到了相当高的水平，处于世界领先地位。那时传入的数学知识都是零碎的、不系统的，可以有选择地纳入中国数学内，或弃置不管。到 1600 年之后，情况发生了根本性的变化。首先，传进来的内容是系统的初等数学，中国知识分子中有些人认识到了它们的用处和价值，热心宣传和研究；其次是出版了一些中文著作，使较多知识分子有了必要的了解和掌握，特别是初等几何、笔算和三角等已被吸收，也就是说无法再弃置不管了；最后，西方初等数学已显示出自身的优越性，如球面三角在天文历法研究中的应用、几何推理的可信性、对数在计算上的应用等等，所以只好接受。

前述的三种主张，虽各有不同，但有一种总的趋势，那就是试图把外来数学融入中国传统数学之中，所谓“会通中西”都是用中法解释西法，从而导致“西学中源”之说。

当时传入中国的西方数学并不是先进的内容，解析几何、微积分、初等概率论等都未传入（指未译成中文），可以说中国数学研究脱离了世界主流。后来越离越远，18 世纪以来外国数学的迅速发展，中国人竟然毫无所知。外国传教士能千辛万苦来到中国，并学习了汉语（后来又学满语），宣传“基督福音”，而中国是否有人下功夫学习拉丁文或法文等外文呢？教会收藏的大量西方数学著作大概没有中国人去借阅。这并不是说中国人懒惰、不思进取（实际上中国人非常勤奋，本卷即多次提到此类事例），而是说

由于语言等隔阂，失去了了解他人和世界数学发展总情况、总趋势的机会，耗费了大量的精力和宝贵的时间，在暗中摸索，结果是收效甚微。

这种情况的出现，虽然与数学家有关，但与明清两代的封建政府关系更大。封建政府没有相应的政策，它不鼓励、不提倡人们学习外语或留学海外直接学习外国数学及其他科学技术，对数学很感兴趣和积极提倡数学的康熙帝同样大力宣扬“西学中源”说，导致很多数学家把精力放在求“源”上，不注意新知识和新内容。

历史教训是沉痛的，应当认真汲取。

本卷和以前各卷一样，由多人执笔，风格各异，虽然进行了必要的加工和弥合，但是斧凿痕迹仍随处可见。

本卷的执笔人员分工如下：

本卷前言（李迪）；

第一编第一章（李迪），第二、三章（尚智丛）；

第二编第一章第一节至第三及第五节（李迪），第四节（高宏林），第二章（孔国平），第三章第一节（李迪），第二节（刘建军、高宏林），第三至第五节（高宏林）；

第三编（高宏林）；

第四编第一章第一节（代钦、李迪），第二节（代钦、李培业），第三节（郭世荣），第四节（王淼、徐义保），第二章（沈康身），第二章第一、二节（李迪），第三节至第五节（特古斯）；

明末到清中叶研究论著分类文献（李迪、刘凤荣）；

人名索引（刘凤荣）；

全书的组织、统稿和加工等工作（李迪）。

在撰写过程中，得到主编吴文俊院士的关怀和指导，也得到其他多方面的支持和帮助，北京师范大学出版社始终关注本书的撰写，特别是前几卷的及时出版，更加推动了撰写工作。在此谨

向有关单位和个人表示谢意。

由于各种因素的限制，主要是我们本身的水平不高，本书在资料、认识、观点和编排等诸多方面可能存在一些问题，甚至错误，恳请同行和广大读者惠予指正。

李　迪

1999年4月1日

于内蒙古师范大学寓所

# 目　录

# 第　一　编

# 西方数学的第一次系统传入

本编主要讲述明末40年左右西方数学第一次较系统传入中国的经过，包括传入的原因、内容和中国学者的初步研究。

## 第一章　传入的背景与经过

本章集中讨论明末（即约1600年～1644年）西方初等数学传入中国的背景和传入的经过。

### 第一节　欧洲文艺复兴时期天文数学之发展与传教士东来

欧洲在经历了长达上千年的中世纪时期之后，开始进入新的发展阶段。在十三四世纪的欧洲，特别是地中海北岸的意大利等地区，商业贸易日益活跃，银行、商会等陆续在一些地方成立，资本主义经济开始萌芽。为了扩大产品销售市场和原料来源，航海业迅速发展，除了近海外，更重要的是开辟远洋航线。当时，欧洲人试图从两个大的方向由海上抵达印度和中国，其一是在大西洋上一直向西航行；其二是向南沿非洲西海岸，绕过非洲。前者于1492年8月3日在意大利人哥伦布（Columbus，1451～1504）

率领下从西班牙出发；后者先后有葡萄牙人迪阿兹(B. Diaz，1450～1500)于 1488 年和达·伽马(V. de Gama，1460～1524)于 1498 年南行，而达·伽马则到达印度。

哥伦布的航行与中国直接相关。他出发时写了一封奏书给西班牙国王和王后，作为航行日记之序言，其中有一段说："尔后，臣于同月向陛下呈递关于印度大陆和一个叫做大可汗的君主的奏书。大可汗一词在吾人罗马语族语言中乃'众王'之王。"[①] 这里所说的"大可汗"显然是指中国的君主，此种叫法系来自马可·波罗的游记。游记中记载的是元朝的事情，当时把忽必烈叫做大汗，因此西方人就以为中国的君王都被称为"汗"或"大汗"等。可见哥伦布向西航行的主要目的地之一是中国。他的目标虽然没有达到，但是他的后继者麦哲伦(F. Magellan，1480～1521)等却完成了绕地球一周的航行。由此，使得海上中西交通大开，耶稣会传教士便通过海路绕过好望角进入印度洋，到达印度、中国、日本、南洋等地进行传教活动。

就在这个时候，长时期沉寂的科学由于各种需要和人们基于对自然界的认识开始活跃起来。天文学、数学、地理学、物理学、医学等等都呈突飞猛进之势，与本书有直接关系的主要是天文学和数学。下面分别予以简述。

**数学** 欧洲文艺复兴时期的数学研究是在吸收希腊人和阿拉伯人(伊斯兰系统)工作的基础上展开的。希腊古代的一些数学名著，如欧几里得的《几何原本》、阿基米德的《圆书》以及阿波罗尼(Apollonius，约前 262～约前 190)、海伦(Heron，约前 1 世纪)等人的著作大都先后被译成拉丁文等文字，在欧洲流传。欧洲的数学家纷纷对这些古书进行注解和研究，写出许多新的著作。算术、代数、几何和三角等在此时期得到较快发展。13 世纪前期意

① 哥伦布．航海日记．孙家堃译．上海：上海外语教育出版社，1987

大利的斐波那契(F. Fibonacci，约 1170～1250)完成了有名的《计算之书》(1202 年)，是当时最有代表性的数学著作，其内容主要是算术。过了 200 多年，到 1478 年在意大利的特雷维沙(Treviso)出版了西方第一本商业数学，作者不详，其中的许多算法、名词术语与同时代的中国数学书类似，但是它们之间可能没有关系①。

对代数的研究也首先开始于意大利。十五六世纪期间一批数学家对方程求根问题，特别是三次方程求根公式开始感兴趣。首先是菲尔罗(Ferro，1465～1526)求出了形如 $x^3+px=q(p>0,q>0)$ 的方程的正根的求根公式。以后由丰塔纳(N. Fontana 又称 Tartaglia，1499? ～1557)和卡丹(Cardan 或 G. Cardano，1501～1576)等得到了更为一般的结果，并且遇到了负数开平方问题，虚数开始出现。四次方程也有人研究。

在几何学方面，当时研究的新内容主要是把数学引入绘画等艺术领域而形成的透视法。意大利人布鲁内利奇(Brunelleschi，1377～1446)最早进行了透视法的研究，后来德国的丢勒(A. Dürer，1471～1528)等则建立了透视的数学体系。丢勒著有《圆规、直尺测量法》和大量的人体画和其他画图。对立体几何与圆锥曲线等研究也同时繁荣起来。

在三角学方面，德国人的工作突出，其中列吉奥蒙坦(Regiomontanus，1436～1476)于 1464 年著《论各种三角形》5 卷，讲述平面和球面三角学，并使之成为独立学科。他还作有正弦表。里蒂克斯(George Joachim Rhaeticus，1514～1574)的工作主要是三角函数表，于 1551 年完成了六种函数表，后来又做出更精密的三角表，他去世后由他的学生、荷兰的奥托(V. Otho，1550? ～1605)完成 2 卷本的 6 种三角函数表，间隔为 10″，精确到小数点

① 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984

后第七位。毕的斯克斯(B. Pitiscus,1561～1613)于1595年出版所著《三角学》一书，“trigonometria”一词作为“三角学”专用词首次出现。书中包括平面和球面三角学内容，以及三角函数表。

有一位与中国有间接关系的德国数学家克拉维斯(P. C. Clavius,1537～1612)应当稍加介绍。他出生于当时德国南部的班贝格(Bamberg)，曾在罗马耶稣会教书，研究数学和天文历法。注释和出版了欧几里得的《几何原本》，在算术、代数、几何、天文历法和计时器等方面有著作10余种，都是用当时流行的拉丁文写的，有些出版于罗马。他有一位意大利学生叫Matteo Ricci，就是明末到中国来的利玛窦(1552～1610)。

**天文学** 欧洲在中世纪信仰托勒玫(Ptolemy,85？～165)的地心体系，认为地球为宇宙中心，其他天体(包括太阳)都围绕地球运转。在教会控制下，人们只能承认这个观点，不能持有异议。1543年，波兰天文学家哥白尼(N. Copernicus,1473～1543)临终时小心翼翼地出版了自己长期研究的成果，书名为《天体运行论》。他不同意托勒玫的观点，而是在希腊人的基础上详细论证了地球并非宇宙中心，而是围绕太阳运转的普通行星。本书出版以后影响很大，有人支持，如伽利略(Galileo Galilei,1564～1642)，但教会方面逐渐看到其“危害性”，于是判其为异端邪说，列为禁书。这时丹麦天文学家第谷·布拉赫(Tycho Brach,1546～1601)提出了一种折衷的宇宙模型，认为除地球以外所有的行星都围绕太阳运行，而太阳则带着这些行星绕地球转。实际上，仍是地心观点，当然不会受到教会的反对。

第谷·布拉赫的学生、德国的刻卜勒(J. Kepler,1571～1630)利用老师的观测资料并在自己观测研究的基础上，不仅承认了哥白尼的日心说，而且把历来认为的圆形行星运行轨道改为椭圆形，太阳在椭圆的一个焦点上，并同时建立了行星运动三定律。

以上简单介绍了当时西方数学和天文学的发展概况。此外，在

数学上还有两件大事应当指出：其一是英国人纳披尔(J. Napier，1550～1617)于1614年所发明的对数；其二是法国人笛卡尔(R. Descartes，1596～1650)于1637年出版的《几何学》中包括了解析几何学的思想。

正是在数学、天文学飞速发展的情况下，欧洲的耶稣会有组织地向东方派遣传教士，目的是传播耶稣教的教义。自然科学知识和有关著作成为他们进入东方各国的礼物之一。

在16世纪初，即有葡萄牙人到中国广东沿海从事商业活动。最早到中国的耶稣会士为西班牙的方济格沙勿略(François-Xavier，1506～1552)，他于1541年开始东来，到达印度、斯里兰卡、马来亚和日本，1552年私自和商人到中国的广东，与早来的葡萄牙人接触，当年年末病死于上川岛。继之而来的有巴莱多(Pierre d'Alcazova，1520～1571)、范礼安(Alexandre Valignani，1538～1606)、罗明坚(Michel Ruggieri，1543～1607)等多人，但是他们在华的活动地区基本上是沿海和南方的某些地方，没有到达明王朝的首都北京。第一位进入北京的耶稣会士就是前面提到的意大利人利玛窦。

利玛窦，字西泰，生于意大利的马赛莱塔(Macerata)。早年就读于当地的耶稣会学校，1568年被遣至罗马学习法学，不久在那里人耶稣会，1571年人圣安德修道院。他在罗马期间正是克拉维斯在那里教学之时，于是从克拉维斯那儿学习了数学、地理学等知识，成为掌握一定自然科学知识的青年。

1577年，利玛窦得到圣安德修道院的批准东来印度。他先到葡萄牙，1578年开始出发，同年到达印度的果阿。1582年，利玛窦应罗明坚之召抵中国广东澳门，第二年9月10日他们一同赴肇庆，当地官员对于他们极表好意，从此便在中国内地建起第一座

圣堂及会所[①]。在以后大约12年间，利玛窦住在广东的肇庆、韶州等地，进行传教等活动。

罗明坚之所以召请利玛窦到中国来，主要是看中他精通自然科学，觉得中国应当有这样一个人。利玛窦在广东期间同样认识到学术的重要性，“以学术收揽人心，人心既附，信仰必定随之”[②]。于是，他首先绘制了一幅世界地图，使当地中国人大开眼界。接着他制造了浑仪、地球仪、日晷等，以赠中国之官员。由是他以精于天文学而得名，并得到信任。

1595年，利玛窦由广东到南京、南昌等地，之后几年，多在这些地方活动、传教。这期间又有一些传教士陆续抵达中国，计有

郭居静(Lazare Cattaneo,1560～1640)，意大利人，1594年来华[③]。

苏如望(Jean Soerio,1566～1607)，葡萄牙人，1595年来华。

龙华民(Nicolas Longobardi,1559～1654)，意大利人，1597年来华。

罗如望(Jean de Rocha,1566～1623)，葡萄牙人，1598年来华。

庞迪我(Didace de Pantoja,1571～1618)，西班牙人，1599年来华。

王丰肃(又名高一志,Alphonse Vagnoni,1566～1640)，意大利人，1600年来华。

阳玛诺(Emmanuel Diaz Junior,1574～1659)，葡萄牙人，1600年来华。

---

① 李俨. 中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955

② 费赖之(Alois Pfister). 入华耶稣会士列传. 冯承钧译. 长沙：商务印书馆，1938

③ 关于各教士入华年代，文献记载往往有出入，有的出入很大。

艾儒略(Jules Aleni,1582～1649)，意大利人，1602年来华。

熊三拔(Sabbathin de Ursis,1575～1620)，意大利人，1606年来华。

金尼阁(Nicolas Triqault,1577～1628)，法国人，1610年来华。

罗雅谷(Jacques Rho,1593～1638)，意大利人，1620年来华。

汤若望(Jean Adam Schall von Bell,1591～1666)，德国人，1620年来华。

邓玉函(Jean Terrenz,1576～1630)，德国人，1620年来华。

傅汎际(François Furtado,1587～1653)，葡萄牙人，1620年来华。

还有许多来华耶稣会士，这里不一一介绍。仅以上所述即可看出，当时耶稣会对在中国传教之重视程度，而会士们大多掌握某一门或几门自然科学知识，其中以掌握天文历法和数学者居多。有的精通机械学，有的精通生物学，还有的同时掌握天文学、物理学、医学、机械学等(如邓玉函)。他们进入中国首先学习汉语，以便和中国人接触，同时大都取中国姓名，而且有字，如汤若望，字道味；金尼阁，字四表；等等。因此，他们的姓名听起来和中国人无大差别。

## 第二节　西方天算书籍大量进入中国

由于传播教义的需要，耶稣会教士进入中国后，自然带来有关宗教的各种书籍，在中国翻译，进行宗教宣传。但他们同时也看到，中国人对西方的科学知识感兴趣，于是便大量传入各种新出版的自然科学著作。1612年，龙华民派遣金尼阁回罗马，请求教会在中国“必须增加新教区”，且以大量藏书颁给新传教会。1618年，金尼阁带着教皇保罗五世(Paul Ⅴ)所赠书籍和新教士22人

返回东方[①]，1620年7月2日抵达澳门，随行的邓玉函、罗雅谷、傅汎际和汤若望也一同到达。据研究，金尼阁从欧洲带回中国的书籍达7 000部之多，但未留下书目，不知具体内容，不过其中肯定包括相当多的自然科学书籍。

当时从西方传到中国的书籍到底有多少，无法统计，利玛窦及其他来华教士大都带有各种书籍和小型科学仪器，其中包括新发明的望远镜等。这些东西当然都掌握在教士和教会手中，有时还在中国制造某些小型仪器，赠送给达官贵人，甚至最高统治者。至于书籍，后来基本上都收藏于北京的北堂图书馆。

从《北堂图书馆书目》(Catalogue of the Pei Táng Labrary, 1947)可以看到所藏各种自然科学著作，有些是作者尚健在就传到了中国。文种绝大多数为拉丁文，另有少数的法文、葡萄牙文、意大利文、荷兰文、德文等。现将可能在1644年明亡以前传入的部分天文学和数学书目列下，以供参考[②]。

克拉维斯的著作传进的最多，计有如下14种：

Epitome Arithmeticae Practicae(实用算术概要)(1585)[③]。

Euclidis Elementorum Libri XV (欧几里得几何原本15卷)(1591,1603)。

Gnomenices Libri Octo (日晷8卷)(1581)。

Astrolabium Romae(罗马星学)(1593)。

Geometria Practica (实用几何学)(1604)。

Fabrica et vsvs instrumenti ed horologiorum descriptionem peropportuni(计时器的结构与制造)(1586)。

In Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco Commentarius (1585,

---

① 费赖之(Alois Pfister). 入华耶稣会士列传. 冯承钧译. 长沙：商务印书馆，1938

② 由于笔者外文水平的限制，有些书名不能译为中文，请读者见谅。

③ 括号内的数字是版本年代，下同。

1602,1606,1607)。

Horologiorum Nova descriptio (新计时器)(1599)。

Novi Calendarii Romani apologia(新罗马历法)(1588)。

Romani Calendarii a Gregorio XIII(格里高利十三世的罗马历法)(1603)。

Algebra (代数学)(1609)。

Tabulae astronomicae nonnullae ad Horologiorum Constructionem Maxime Vtiles(1605)。

Compendium brevissimum describendorum Horologio Horizontalium ac Declinantium (1603)。

Opera Mathematica V (数学论丛 5 卷)(1612)。

刻卜勒的著作有：

Epitome Astronomicae Copernicanae(哥白尼天文学概要)(1635)。

Prodromus dissertationum Cosmographicarum (神秘的宇宙结构引论)(1596)。

Harmonices mundi (和谐的宇宙)(1619)。

Tabulae Rudolphinae(鲁多尔夫表)(1627)。

Philippus von Lansbergen (1561～1632)的著作有：

Triangulolorum geometriae Libri quatour (三角形几何学 4 卷)(1591)。

伽利略的著作有：

De proportionum instrumento a se invento (比例规发明)(1612)。

Systema Cosmicum(宇宙系统)(1635)。

韦达(F. Viete,1540～1603)的著作有：

De aequationum recagnitione et emendatione (方程的整理与订正)(1615)。

Apollonius Gollus(阿波罗尼著作的注释)(1600)。

Supplementum Geometriae (几何学补遗)(1593)。

Munimen adversus nova Cyclometrica (新的测圆方法)(1594)。

Ad problema Quod Omnibus Mathematicis totus orbis Construendum proposuit Adrianus Romanus (对罗曼所提数学问题的解答)(1595)。

Pseudo-mesolabum et alia quaedam adiuncta capitula (1595)(按:该书讲几何学问题)。

纳披尔关于对数的著作有一部荷兰文传入，即

Egechiel de Decker: Nieuwe telkonst, inhoudende de logarthmi Voor de ghetallen beginnende 1 tot 1000 (1626)

斯蒂汶(Simon Stevin,1548～1620)的著作有:

De Weeghdaet (1586)。

De beghinselen der Weeghconst (1586)。

De beghinselen Waterwichts (1586)。

Hypomnemate Mathematica (1608)。

第谷的著作有:

Astronomiae instauratae progymnasmata (1602)。

Epistolarum astronomicarum (书信式的天文学) (1610)。

De mundi aetherei recentioribus phaenomenis(新宇宙现象)(1610)。

列吉奥蒙坦的著作有:

Epitome in Almagestum Ptolomei (托勒玫《大集》概要)(1498)。

Screpta clorissimi Mathematici(1544)。

Tabulae directionum profectionumque non tam Astrologiae judiciariae (1584)。

Tabulae directionum profectionumque，totam rationem primi motum continentes，& non tam Astrologiae judiciariae (1606)。

弗洛别纽斯(Geory Ludwig Frobenius，1566～1645)的著作有1种传入，即

Glauis Universi trigonometrica (普通三角学) (1634)。

帕奇欧里 (Luca Pacivoli，1445～1514)的著作有1种，即

Summa de Arithmetica，Geometria，e proportioni，e proportionalita (算术、几何、比例和均匀性的总论) (1523)。

毕的斯克斯的著作有：

Trigonometriae Sive，De dimensione Triangular (三角学或测量三角形) (1612)。

Sinum tangentium et Secantium Canon Manualis Accommodatus ad trigonometriam (标准三角学的正弦、正切和正割) (1613)。

比利时科学家罗曼(Adriaen von Roomen，1561～1615)的著作有：

In Archimedis circuli dimensionem xpositio & Analysis (阿基米德《圆书》的评价及分析) (1597)。

Conon triangulorum Sphaericorum (标准球面三角学) (1609)。

Ideae mathematicae pars prima (原始的数学概念) (1593)。

Ouranographia sive Caeli descriptio (1591)。

Paruum theatrum urbium sive urbium praecipuarum totus orbis breuis & methodica Descriputio (1608)。

Speculum astronomicum (天文反射镜) (160?)。

Supputatio ecclesiastica Secundum nouam et antiquam Calendari rationem (1595)。

丰塔纳(塔他格利亚)的意大利文著作有：

Opere del famosissimo Nicolo Tartaglia cioe Quesiti (1606)。

La Nuova Scientia de Nicolo Tartaglia con una gionta al terzo Libro (1550)。

La prima parts del Ganeral trattato di numeri (1556～1560)。

Quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartaglia (尼古拉·塔尔塔利亚的各种问题和发明)(1554)。

Regionamenti de Nicolo Tartaglia sopra la sva travagliata inventione (1551)。

Regola generale da svlevare con ragione e misvra no solamēte ogni affondata Naue (1551)。

哥白尼的著作有：

De revolutionibus orbium coelestium Libri Ⅵ (天体运行论 6 卷)(1566)。

Prodromus dissertationum cosmographicarum (1596)。

Astronomia instaurata (修订天文学)(1617)。

阿尔斯台特(Johann Hainrich Alsted，1588～1638)的著作有：

Elementale mathematicum (初等数学)(1611)。

安德逊(Alexander Anderson，1582～1619?)的著作有：

Supplementum Apollonii redivivi (阿婆罗尼著作的增补)(1612)。

Prozetetico Apolloniani problematis a se iam pridem edito in supplemento Apollonii Rediuiui (1615)。

阿比亚努斯(Philippus Apianus，1531～1589)的天文学著作有：

De utilitate trientis (1586)。

阿基米德的著作有：

由尼古拉·塔尔塔利亚精巧编辑的 Opera Archimedis Syracusani Philosophi et Mathematici（阿基米德哲学和数学著作论集）(1543)。

班纳代蒂(Giambattista Baneded，1530～1590)的著作有：

Resolutio omnium Euclidis problematum aliorum ad hoc necessario inuentorum una tantummodo circine data apertura (1553)。

卡瓦列利(Bonaventura Cavalleri，1598～1647)的著作有：

Trigonometria plana，et sphaerica，Linearis & Logarithmica（平面和球面三角学，线性和对数）(1643)。可能在清初传入。

希萨特(Johann Baptist Cysat ，1588～1657)的著作有：

Mathemata Astronomica de loco（数理天文学的狂热）(1619)。

斯柯纳尔(Johann Schöner，1477～1547)的著作有：

Opera mathematica（数学论丛）(1551)。

福伊格林(Johann Voegelin，？～1549)的著作有：

Elementale geometricum，ex Euclidis Geometria（初等几何或欧几里得几何）(1543)。

由 Gracilis 于 1557 年在巴黎出版的拉丁文本(Euclidis) Elementorum 15 卷本传入了 1612 年版本。

以上所列举的仅是一部分。可以看出，当时西方主要数学家和天文学家的著作大都通过教会或教士传人我国。

还有许多种数学著作，虽然出版于此时期，如沃拉克的 Trigonometria artificialis，sive magnus canon triangularum logarithmicus 出版于 1633 年，可能晚到清初才传入中国，因此入第二编。

除北堂藏书外，很可能在某些个人或机关手中还有，但这是一个无法弄清的问题，只是推想而已。

## 第三节　来华教士与中国知识分子的合作

西方大批耶酥会士来华并把大量包括天文学和数学在内的著作源源不断地传入中国，使教士在华基本上站住脚跟。之所以能做到这一点，关键是中国有一批知识分子起了决定性作用。这些中国知识分子不仅接受了西方的自然科学知识，有的还受洗成为教徒，特别重要的是他们当中的某些人成为明朝的高级官员。这些人中主要有徐光启、李之藻、王征、孙元化、李天经、杨廷筠、张赓等，尤以徐光启为最。

徐光启(1562～1633)，字子先，上海人。幼时家境贫寒，父徐思诚，原来经商，以后改为务农。又遭倭寇侵扰，家境益贫。光启 8 岁(1569 年)读书于龙华寺，大约从 15 岁起“出就外传，敏而好学。章句、帖括、声律、书法，均臻佳妙”。[①] 20 岁(1581 年)，在金山卫，“补诸生高等，食饩学宫，便以天下为己任”。又“以食贫，故教授里中子弟”[②]。同年娶妻吴氏。



徐光启

徐光启 27 岁(1588 年)赴太平府(今安徽当涂)应乡试，未第。32 岁(1593 年)赴韶州(今广东韶关)教书。后二年(1595 年)在韶州教书余暇，信步至城西天主堂，当时郭居静在那里掌教事，遂与“郭子语，颇惬恰”。原来，利玛

---

① 徐骥．先文定公行述

② 李杕．徐文定公行实

窦在那里，此时可能由于利氏北上南京，又折回南昌而未能获见①。第二年(1596年)光启应邀至浔州(今广西桂平)教书，次年北上至顺天府(今北京市)应乡试，获举人第一名。留在京师，应第二年(1598年)会试，不第，仍回南方教书。他“布衣徒步，陋巷不改，闭户读书，仍以教授为业。尤锐意当事，不专事经生言，遍阅古今政治得失之林”。②

这时利玛窦在南京、南昌一带从事传教和进行学术研究，且曾一度进入北京，又返回。据研究，“1599年2月瞿太素(汝夔)又随着他(利玛窦)回到南京，从此至1600年5月为止，他一直住在南京，研究改历事宜，在南京也名声显著，弟子很多”③。由于利氏的声名日益扩大，使徐光启早闻其名，特别是利氏之《万国舆图》更是光启所闻之事。1600年春，光启至南京，始与利氏相晤，认为利氏“为此海内博物通达君子”④。不久利氏赴北京，光启也回乡间教书。1603年又去南京，欲拜访利氏，因利氏不在由郭居静、罗如望接见，且学习了教义，由罗如望洗礼为教徒，教名“保禄”(Paul 或 Paulus)。然后回上海老家⑤。

徐光启43岁(1604年)赴北京应会试，中进士，为翰林院庶吉士。从此，他走上了仕途。此后便与利玛窦有了更多的接触和学术交往。他“每布衣徒步，晤于(利氏)邸舍，讲究精密，承向冲虚”⑥，讨论数学与天文学等问题。1607年因父丧扶榇挈眷回上海守孝，在此期间，他主要从事数学等研究。1610年底回北京复职，而利玛窦已于4月去世。

---

① 梁家勉. 徐光启年谱. 上海：上海古籍出版社，1981

② 徐骥. 先文定公行述

③ 裴化行. 利玛窦与东方科学. 汪宇平译. 时与潮副刊，1942，1(2)：76～81

④ 利玛窦. 二十五言跋

⑤ 同①。

⑥ 同④。

此后，徐光启主要在京为官，如詹事府左春坊左赞善(1617年)，礼部左侍郎、管部事、礼部尚书(1630年)，最后达到礼部尚书兼东阁大学士，参预机务，知制诰及同知经筵事(1632年)，相当于宰相的高位。1633年卒于官。

徐光启研究天文历法、数学、农学、水利学，著有《农政全书》，晚年研究兵法，致力于历法改革和富国强兵之道。他为官清廉，“盖官之日，囊无余赀”①，“官邸萧然，敝衣数袭外，止著述手草尘束而已”②。

李之藻(1565～1630)，字振之，又字我存，仁和(今浙江杭州市)人。约于1598年成进士，官南京工部员外郎，曾与利玛窦交往。1611年，他父亲去世，回家守孝。1613年他改衔为南京太仆寺少卿，研究西方天文历法，与龙华民等多有交往。约在1621年，李之藻为光禄寺少卿，管工部都水清吏司事，又官左参政，被谪至广东，后起用参加改历工作。李之藻精通天文学、数学，也研究兵法。



李之藻

王征(1571～1644)，字葵心，又字良甫，泾阳(今陕西泾阳县)人。其父王应选，以经算教授乡里，著有《算数歌款》等书。王征受家影响，爱学习，“年十五，文章骏发，立志落落，不与众伍。敦大节，肆力学向。有修庵尚翁一见异之，妻以女”③。第二年补弟子员。17岁(1587年)“入庠读书，见范文正公做秀才便以天下

---

① 见《明史》卷二百五十一“徐光启传”。

② 查继佐．罪惟录．徐光启

③ 张缙彦．佥宪王端节公墓志铭

为己任，辄慨然有意为其人"[①]。后来他到北京，于1616年与庞迪我接触，受教义，可能以后不久他入教，杨廷筠也成为教徒。年52岁(1622年)登进士第，次年补广平推官。因母丧居家，但他要把耶酥教引入陕西，于是有金尼阁到西安。56岁(1626年)，王征守孝期满，回京。当时与邓玉函、汤若望、龙华民等来往，向他们请教。在这前后，也多与徐光启、孙元化等交往。1643年10月，李自成攻陷潼关，王征不与合作，第二年绝食而亡[②]。

李天经(1579～1659)，字仁常，又字性参，赵州吴桥定原乡(今河北赵县某乡)人。1613年进士及第，历任河南陕西藩臬。又任山东参政，1633年参加历法改革工作，1638年升为光禄寺正卿。后因战乱还乡，入清他曾应召入见，未几固辞致仕[③]。

他人不再一一介绍。

正是这些知识分子与来华耶酥会士有密切关系，才使从西方传进来的书得以部分地译为中文，在中国传播。就传教士来说，他们是乐于翻译的。杨廷筠于1623年说："六科经籍约略七千余部，业已航海而来，且在在可译。希望假我十年，集同志数十手，众共成之。"[④]其中所谓"六科"是当时西方的大学所设之六个学科，即文、理、医、法、教、道。而"七千余部"则是指金尼阁从欧洲带回的7 000部书，可知包括六科全部类别。这话虽出自中国教徒之口，但却反映了教士们的思想。实际上，他们把大批"六科经籍"运来中国就是要在中国传播，配合教义宣传科学知识，无疑会起到推动宣传教义的作用。

在此期间，教士和中国的徐光启等翻译或编译了大量西方的

① 王征．两理略自序

② 宋伯胤．王征先生年谱．上智编译馆馆刊，1948，3(2)：68～77

③ 李俨．中国数学大纲(下册)．北京：科学出版社，1958

④ 艾儒略．西学凡之杨廷筠序

书籍，同时还用中文写了不少。这里首先介绍一下非官方的著译情况，且以数学和天文学为主。有一点应当指出：当时的中国人不懂外文，因此翻译都是一中一外，外国教士看着书用中国话说出来，中国人用笔做记录，中间当然要商量译法和名词术语的确定。这样，翻译什么主要由教士选择，中国人是被动的。

利玛窦的译著有：

1.《万国舆图》，1584 年译于广东肇庆，1598 年在南京印刷。

2.《测量法义》1 卷，利玛窦口译，徐光启笔受。

3.《经天该》1 卷，利玛窦口译，李之藻笔述。

4.《几何原本》前 6 卷，利玛窦口译，徐光启笔受。1607 年译成、出版，所用底本为前述 Clavius 之《Euclidis elementorum libri XV》。

5.《乾坤体义》3 卷，利玛窦撰。李俨认为系由 Clavius 之《In sphaenam Ioannis de Sacro Bosco Commentarius》编出[①]。

6.《同文算指前编》2 卷，《通编》8 卷，《别编》1 卷，利玛窦授，李之藻演，系译自 Clavius 之《Epitome arithmeticae practicae》，但补充了一些中国算题[②]。

7.《圜容较义》1 卷，利玛窦授，李之藻演，译成于 1608 年。系译自 Clavius 之《Trattato della figura isoperimetre》，包括在《Opera mathematica》之中[③]，不见有独立的本子。

熊三拔的译著有：

1.《简平仪说》1 卷，熊三拔撰说，徐光启札记。

2.《表度说》1 卷，熊三拔撰。

徐光启的著作有：

1.《勾股义》1 卷，徐光启撰。

2.《测量异同》1 卷，徐光启撰。

①②③ 李俨．中国数学大纲(下册)．北京：科学出版社，1958

傅汎际的译著有：

1.《名理探》10卷，傅汎际口译，李之藻笔授。

2.《寰有诠》6卷，傅汎际口译，李之藻笔授。

孙元化(？～1632)的著作有：

1.《泰西算要》1卷，孙元化撰。

2.《几何体论》1卷，孙元化撰。

3.《几何用法》1卷，孙元化撰。

邓玉函的译著有：

1.《浑盖通宪图说》2卷，邓玉函口译，李之藻笔述。

2.《远西奇器图说》2卷，邓玉函口授，王征译绘。

艾儒略的译著有：

1.《职方外纪》6卷，艾儒略增译，杨廷筠汇记。

2.《1612年11月8日日食之观测》，艾儒略撰[①]。

高一志(原名王丰肃)的译著有：

《空际格致》2卷，高一志撰。

龙华民的著作有：

《地震解》，龙华民述。

阳玛诺的著作有：

《天问略》1卷，阳玛诺撰。

汤若望的译著有：

《火攻挈要》2卷，汤若望口译，焦勖笔受。此书为《则克录》3卷之前2卷。

李之藻于明天启(1621～1627)编一套《天学初函》共56卷，有当时刻本。收入书籍20种，分“理编”和“器编”两部分，各10种。“器编”所收为自然科学书籍，计有：《泰西水法》6卷(熊

① 费赖之(Aloys Pfister)．入华耶稣会士列传．冯承钧译．长沙：商务印书馆，1938．160

三拔撰,徐光启记),《同文算指前编》2 卷,《通编》8 卷,《浑盖通宪图说》2 卷,《几何原本》6 卷,《圆容较义》1 卷,《表度说》1 卷,《测量法义》1 卷附《测量异同》1 卷,《天问略》1 卷,《勾股义》1 卷,《简平仪说》1 卷。

在上述各书中,大多数译著者明确,少数的不同版本有差异,这里是按最可能的情形记入,但未作详考。其中有些是中国人独立撰写的,如孙元化的三种书,都是对西方数学之研究。

## 第四节 明末改历与《崇祯历书》

第三节所讲主要是传教士与高层知识分子私人间的译述活动,与朝廷没有关系。从译述内容来看是分散的,不系统的。就在这时,系统化工作的机会来了。

明代所用历法是刘基(1311～1375)在元代《授时历》的基础上修订的《大统历》,而不是经过实测建立的新历法。《授时历》是中国历史上最优秀的历法之一,但在元代就已出现漏报日食的现象。洪武十七年(1384 年)漏刻博士元统认为,从《授时历》历元到洪武甲子(1384 年)已“积一百四年,年远数盈,渐差天度,合修改。七政运行不齐,其理深奥”。建议修改,“以成一代之制”,得到批准,实际上“仍取《授时历》,去其岁实消长之,析其条理”。永乐帝迁都北京,北极出地高度与南京不同,本来应当改正,可是,到正统(1436～1449)时当有人提出这个问题时,正统帝竟然下令:“此后造历,仍用洪、永旧制。”[①] 就是还要用洪武、永乐时的数据。

应当修改或重新建立历法之时而不进行改革,所用历法必然要出问题。景泰元年正月辛卯(公元 1450 年 1 月 28 日),“卯正三

---

① 见《明史》卷三十一“历志一”。

刻月食。监官误推辰初初刻，致失救护”[①]。后来也经常预报交食出错。现列简表于下(表1.1.1)。

表1.1.1[②]

| 日期 | | 内容 |
|---|---|---|
| 中历 | 公历 | |
| 景泰元年正月辛卯 | 1450年1月28日 | 卯正三刻月食，监官误推辰初初刻，致失救护。 |
| 成化十五年十一月戊戌望 | 1471年 | 月食，监推又误。 |
| 弘治中 | 1481～1505 | 月食屡不应，日食亦舛。 |
| 正德十二、三年 | 1517，1518 | 连推日食起复，皆弗合。 |
| 嘉靖十九年三月癸巳朔 | 1540年4月 | 台官言日当食，已而不食。 |
| 万历十二年十一月癸酉朔 | 1584年12月 | 《大统历》推日食九十二分，不食。 |
| 万历二十年五月甲戌夜 | 1592年6月 | 月食，监官推算差一日。 |

表1.1.1所列仅是极少数的几次，可是统治者或礼部总是不以为然，不思改革。天文研究机构司天监内外有不少人不断提出对现行的《大统历》应进行改革，但奇怪的是统治者不仅不支持改革，反而对提议者进行打击，成化十七年(1481年)竟把提议者投入监狱！一般是被钦天监官员“以祖制不可变”而压下、不报。现亦列表如下(表1.1.2)。

---

① 见《明史》卷三十一“历志一”。

② 李迪．明代天文历法史中的若干问题．见：中国科学技术史论文集(一)．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．330～343

表 1.1.2[①]

| 提议者 | 年　代 | 主　张 | 结　果 |
|---|---|---|---|
| 俞正已 | 成化十七年(1481年) | 上《改历疏》 | 礼部尚书周洪谟认为“轻率狂妄，宜正其罪”，于是“遂下正已诏狱”。 |
| 张　升 | 成化十九年(1483年) | 根据岁差改历 | 钦天监以为测验日食虽与张升新法合，但却认为祖宗时所定之法不可不遵，因而不改。 |
| 吴　昊 | 弘治二年(1489年) | 建议修改浑仪和简仪 | 诏下礼部，如其说，制木样测验，久之乃铸为新仪。 |
| 朱　裕 | 正德十三年(1518年) | 上请修改历法疏 | 礼部奏：“古法未可轻变，请仍旧法。别选精通历学者，周濂等以新法参验，更为奏请”，从之。又有说：“定历授时，乃朝廷重典，未可轻易”。 |
| 郑善夫 | 正德十四年(1519年) | 按交食以变历元 | 不报。 |
| 朱　裕 | 正德十六年(1521年) | 建议统一晷表尺寸 | 疏入不报。 |
| 华　湘 | 嘉靖二年(1523年) | 上奏改历 | 下礼部议请，如所奏得旨，允其测候，访取秘书，报罢。 |
| 朱载堉 | 万历二十三年(1595年) | 进《圣寿万年历》、《律历融通》疏包括改历内容 | 礼部尚书范谦奏：“世子(朱载堉)留心历学，博通古今，宜赐勅奖励从之。” |

① 李迪. 明代天文历法史中的若干问题. 见：中国科学技术史论文集(二). 呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991. 330～343

续表

| 提议者 | 年　代 | 主　张 | 结　果 |
|---|---|---|---|
| 邢云路 | 万历二十四年(1596年) | 上书言："治历之要，无逾观象、测量、候时、筹策四事。" | 钦天监见到邢云路疏，"甚恶之。监正张应候奏诋，谓其僭妄惑世"。礼部尚书范谦认为："历为国家大事，士夫所当讲求，非历士之所得私。律例所禁乃妄言妖祥者耳。监官拘守成法，不能修改合天。幸有其人，所当和衷共事，不宜妒忌"，并建议由邢云路"提督钦天监事督率官属，精心测候，以成钜典"。议上不报。 |

从表1.1.2中可以看出，提议改革历法之事一直持续到万历二十四年(1596年)，而表1.1.1则更到万历三十八年(1610年)。

提出改历的人都主张实测，而且大都注意岁差改正值的问题，即根据岁差改正恒星的坐标值。这都是正确的。事实说明，明代天文历法落后不是没有人才，而是极端保守的官员把持司天监，使人才无法发挥作用。

由于对万历三十八年十一月壬寅日食推算上的差误，礼部官员才开始考虑改革历法问题。"因请博学知历学者，令与监官昼夜推测，庶几历法靡差。"此时利玛窦(于同年去世)、龙华民、熊三拔、庞迪我、阳玛诺、艾儒略等西方传教士已在中国，于是有人想到他们"携有彼国历法，多中国典籍所未备者"。由此礼部上奏，建议调集中国的邢云路、冷守中、徐光启、李之藻以及庞迪我、熊三拔进行历法改革，同时明确提出："欲议修历，必重测验。乞敕所司修治仪器，以便从事。"结果只有邢云路和李之藻二人到京①。实际上，根本未开展工作。后来李之藻改衔南京太仆寺少卿，于

① 见《明史》卷三十一"历志一"。

万历四十一年(1613年)他再一次推荐庞迪我等，他说："其所论天文历数，有中国昔贤所未及者，不徒论其度数，又能明其所以然之理。其制窥天、窥日之器，种种精绝。今(庞)迪莪［我］等年龄向衰，乞敕礼部开局，取得历法，译出成书。"也同样未起到作用，"时庶因循，未暇开局也"[①]。几年之后，庞迪我便去世了。

此时徐光启对天文历法特别感兴趣，他与熊三拔"制天盘、地盘、定时衡尺、璇玑玉衡器，皆时人所未觏"[②]。他又在家书中提到计划在京"大作仪器，多用人"[③]，要进行历法改革，不过并未实现。

改历工作从此完全停止，十五年之后，徐光启因崇祯二年五月乙酉朔日食(公元1629年6月26日)用《大统历》和《回回历》所推都不准确，只有西洋不误。同时司天监五官正戈丰年等也指出："今若循旧，向后不能无差。"于是礼部才奏开局修改历法，由徐光启督修。徐光启提出：此次改历应采用西法，参与考订，使与《大统》法会同归一。不敢冒然明提出完全采用西法的问题。他建议，调李之藻、龙华民、邓玉函参与工作，得到批准。是年九月一日开局，地点在宣武门内。又过了两个月，到十一月六日历局才正式成立[④]。第二年(1630年)五月邓玉函去世，又调汤若望、罗雅谷入历局。

当时改历的主要工作之一是编译西方的天文历法和相应的数学著作。徐光启亲自上天文台进行观测，有一次从台上失足"颠坠台下，致伤腰膝，不能动履"[⑤]。他还按照多年前的计划，提出

---

① 见《明史》卷三十一"历志一"。

② 李杕．徐文定公行实

③ 徐光启家书(第六通)．见：徐光启集(卷十一)．新一版．上海：上海古籍出版社，1984．486

④ 梁家勉．徐光启年谱．上海：上海古籍出版社，1981．166

⑤ 梁家勉．徐光启年谱．上海：上海古籍出版社，1981．178

制造天文仪器问题，其中包括望远镜。这是他又一主要工作。

经过两年左右的工作，已经编译出不少书籍。从崇祯四年(1631 年)起，分批向崇祯帝进呈。前三次为徐光启本人，以后还有二次，进呈人因徐光启去世而改由李天经。

第一次进呈：崇祯四年(1631 年)正月二十八日，徐光启进历书 6 卷、表 1 套 18 卷，即

《历书总目》1 卷；

《日躔历指》1 卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《测天约说》2 卷，邓玉函译撰，汤若望订；

《大测》2 卷，邓玉函译撰；

《日躔表》2 卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《割圆八线表》6 卷；

《黄道升度表》7 卷；

《黄赤道距度表》1 卷①，邓玉函译撰，龙华民订；

《通率表》2 卷。

第二次进呈：崇祯四年(1631 年)八月初一日，徐光启进历书 21 卷，另加 1 摺，即

《测量全义》10 卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《恒星历指》3 卷②，汤若望译撰，罗雅谷订；

《恒星历表》4 卷；

《恒星总图》1 摺；

《恒星图像》1 卷；

《揆日解订讹》1 卷；

《比例规解》1 卷，罗雅谷译撰，汤若望订。

第三次进呈：崇祯五年(1632 年)四月初四日，徐光启进历书

① 后改为 2 卷。

② 后改为 6 卷。

30卷，即

《月离历指》4卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《月离历表》6卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《交食历指》4卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《交食历表》2卷[①]，汤若望译撰，罗雅谷订；

《南北高弧表》12卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《诸方半昼分表》1卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《诸方晨昏分表》1卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算。

第四次进呈：崇祯七年(1634年)七月十九日，李天经进历书29卷，1架，即

《五纬总论》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《日躔增》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《五星图》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《日躔表》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《火木土二百恒年表》，并《周岁时刻表》共3卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《交食历指》3卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《交食诸表用法》2卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《交食表》4卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《黄平象限表》7卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《土木加减表》2卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《交食简法表》2卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《方根表》2卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

恒星屏障1架，可能是汤若望制造。

第五次进呈：崇祯七年十二月二日(1635年1月20日)，李天经进历书32卷，即

① 后增为9卷。

《五纬历指》8卷[①]，罗雅谷译撰，汤若望订；

《五纬用法》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《日躔考》2卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《夜中测时》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《交食蒙求》1卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《古今交食考》1卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《恒星出没表》共2卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《高弧表》5卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《五纬诸表》共9卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算；

《甲戌乙亥日躔细行》共2卷，罗雅谷、汤若望指授，监局官生推算。

以上共136卷，另有1摺和1架，合称《崇祯历书》，并刊刻出版。

《崇祯历书》的出版，标志着改历的准备工作已经完成。虽然李天经颁过历书，但距明亡只有几年时间，崇祯十六年(1643年)三月乙丑朔日食，用几种方法测算，西法独验，八月“诏西法果密，即改为《大统历法》，通行天下”。为时已晚，“未几国变，竟未实施”。

汤若望在《崇祯历书》的基础上，继续进行整理和增加内容。清兵进入北京后，他把历书献上，顺治二年(1645年)被任命为钦天监监正，同时颁行他编制的《时宪历》。新整理出来的《崇祯历书》改名为《西洋新法历书》，100卷，重新刊印。乾隆时修《四库全书》，又将其收入，更名为《新法算书》，仍100卷。书名如下：

《治历缘起》8卷；

《大测》2卷；

---

① 后来与下一本合并，成9卷。

《测天约说》2卷；

《测食略》2卷，汤若望述[①]；

《学历小辩》1卷，历局与魏文魁辩论稿；

《浑天仪说》5卷，汤若望译撰，罗雅谷订；

《比例规解》1卷；

《筹算》1卷，罗雅谷译撰，汤若望订；

《远镜说》1卷，汤若望译撰；

《日躔历指》1卷；

《日躔表》2卷；

《黄赤正球》、《黄道交极圈角表说》、《黄道交极圈内角表》三种共1卷；

《月离历指》4卷；

《月离表》4卷；

《五纬历指》9卷；

《五纬表》11卷；

《恒星历指》3卷；

《恒星表》2卷；

《恒星图说》1卷；

《恒星出没表》2卷；

《交食历指》7卷；

《古今交食考》1卷；

《交食表》9卷；

《八线表》2卷，邓玉函、罗雅谷、汤若望同译撰；

《几何要法》4卷，艾儒略口译，瞿式谷笔受；

《测量全义》10卷；

《新法历引》1卷，汤若望删定；

---

① 署名译撰者的书，未收入《崇祯历书》，下同。

《历法西传》1 卷，汤若望著；

《新法表异》2 卷，汤若望著。

把这份目录与《崇祯历书》比较，可以看出两者差别甚大，去掉了《崇祯历书》中的一部分，又加进来将近 10 种。还有些是把原来的两书合并为一书，等等。有一点是肯定的，即所有的书都是明末所完成，属明代范围。但是，应注意，《崇祯历书》和《西洋新法历书》(《新法算书》)不能等同看待。

两书中所收数学和与数学有关的译著有 9 种，它们是《大测》、《割圆八线表》、《测量全义》、《比例规解》、《南北高弧表》、《高弧表》、《筹算》、《八线表》和《几何法要》。这些译著的底本，有的已被找出一些(因为有的译著可能是由几种底本编译的，所以不易找出)。下面仅就所知予以讨论。

**《大测》**　其中包括三角学内容。据研究，可能有相当一部分来自毕的斯克斯的三角学著作《Trigonometriae Sive》、《De dimensione Triangular》[1]。《大测》的第一部分和《Trigonometriae》的第一卷有些内容的叙述完全一致。如，

《大测》第一篇

(一)三角形者，一形而三边，容有三角也。

(五)大测法，分圜三百六十为度，度析百分(中国)，或六十分(远西)，分或百析为秒，递析为百，至纤而止(中国)；或析为六十秒，递析为六十，至十位而止(远西)。

(九)有弧不足九十度，则其至九十度者，名余弧，亦曰较弧，亦曰差弧。

(四十三)平面两三角形，在圜内同底，两形之顶相连成一四边形，此形内有两对角线，此形相对之各两边，各相偕为两直角

① 白尚恕. 介绍我国第一部三角学——《大测》. 数学通报，1963(2)：48～封底

形，并与两对角线相偕为直角形等，多罗某[①] 之法。

《Trigonometriae》卷一

2. Triangulum est, sigura tribus lateribus tres angulos compaehendenes.

7. Circulus in trigonometria omnis dividitur in partes sive grad. 360, & gradus singuli reiroum in 60, scrupula, sive minuta prima, & vunm primum in tatidemm secunda, & C.

9. Arcus quadrante minoris complementum est, quod ipsi ad 90 partes.

54. Si duo Triangula plana eidem circuli segmento adeandem basin inscripta, superne connectantur: Sic ut inde existat sigura guadrilatera, diagoniis intersecta: Rectangulum diagoniorum est equale rectan-gulis oppositorum laterum simul sumtis. Ptolmeus copernicus.

《大测》第二篇的（一）、（六）、（十四）、（二十一）与《Trigonometriae》对应的各条不仅内容一样，而且连顺序号都相同。前书的第六篇“根法四”与后书卷三相对应的部分更是明显，现对比如下：

《大测》第六篇

根法四，凡直角三角形之各边，皆能为直半径。

其一，以弦线为半径，作弧，即余两腰包直角者，各为其对角之正弦。

其二，以大腰为半径，即小腰为小角之切线，而弦线为小角之割线。

其三，以小腰为半径，即大腰为大角之切线，而弦线为大角之割线。

---

① “多罗某”即 Ptolomy 之另一音译。

《Trigonometriae》卷三

1. Un umquo dque latus pro radio pouipotest, ad cononnum triangutorum convenienter.

Si latus subtendens rectum ponao radio: latra includentio rectum sunt sinus acutorum ipsis oppositorum.

Si majus includentium rectum ponas pro radio: minus inclendentium rectium rectum est tangens, subtendens rectum, secans acuti minoris.

Si minus inclendentium rectum ponas pro radio, majus inclendentium rectum est tangens; subtendens rectum, secans acuti majoris.

根据这些情况，可以看出《大测》的许多内容是直接译自《Trigonometriae》一书。而后者于当时已传入我国，把它作为《大测》底本之一是很自然的。

**《测量全义》** 该书包括大量的几何和三角内容。白尚恕认为，其中的资料是摘译自玛金尼(G. A. Magini,1555～1617,意大利人)的《平面三角测量》(De Planis Triangulis)、克拉维斯的《实用几何学》、玛金尼《球面三角学》(Et Trigonometriae Sphaericonum)以及第谷的《天文学》(Astronomiae Instauratae Progymaasmata)各书，其中有些部分是自编①。这些著作在编译《崇祯历书》之前都已传入中国，因此被摘译编入《测量全义》中。下面举两个对照的例子。

**例1** 《测量全义》卷六第一题为：

"球上大平圆之积，为本球圆面积四之一[此亚奇默德之一卷

① 白尚恕.《测量全义》底本问题初探. 科学史集刊，1984(11)：143～159

三十一题[①]也。大平圆者，从大圈过心，剖球体为二，所分两平面是也。圆面积者，全球大曲面之平积也]。"

"系：凡周乘径，生球圆之积，亦生大平圆积之四倍，大圆周线上方形与球圆之比例，若大圆之周线与其径。"

"解曰：如图(图 1.1.1)，甲乙丙丁球上之平圆也。甲丙其径 [与球径等]，己辛与圆之周线等。上成己壬方形，形之庚辛与甲丙径等。而己壬方形外，复成庚戊方形。题言己庚矩形，为大平圆之四倍。壬戊矩形与庚己矩形等。盖壬辛、己辛同为矩方形之一边，戊辛、辛庚亦同为矩方形之一边，则两矩方形必等。夫己壬周线上方形也，壬戊

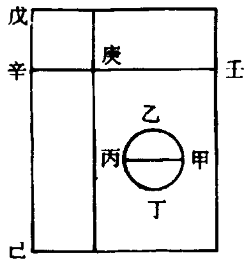



图 1.1.1

为大平圆之四倍，而与球之圆面等，则其比例如己辛与辛戊矣。[五卷二，周与径比例之数为二二三之七一或二二之七[②]。]又大圆径上方形与球之圆面，若圆之径与其周。盖己庚矩方形与球之圆面等，庚戊为径上之方形，则两形之比例必若己辛周与辛戊径矣。"

**克拉维斯《实用几何学》卷五第五章命题二为**

"Rectangulum sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra comprehensum, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ euieden sphæræ æquale." "Eadem est proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in sphæræ ad

---

① "亚奇默德"即 Archimedes 之音译，所指之题载于他所著之《De Conoid & Sphaeriod》中，T. L. Heath 译本为命题三十三。

② "周与径比例之数为二二三之七一或二二之七"这段话是指圆周率 $\pi\approx\frac{223}{71}$ 或 $\pi\approx\frac{22}{7}$。这两个值出于阿基米德的《De Dimensione ex Cilculi》，书中有相当于 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$ 的结果，而 $3\frac{10}{71}$ 与 $3\frac{1}{7}$ 即为 $\frac{223}{71}$ 和 $\frac{22}{7}$。

superficie sphæræ, quæ circumferentiæ circuli maximi ad diametrum. Idem eadem est proportio quadrati diametri maximi circuli in sphæræ ad superficiem sphæræ, quæ diametri ad circuferentiam eiusdem circuli maximi"　"Sit circulus sphæræ maximus ABCD, eiusque diameter AC. Dico ita esse quadratum, ex circumferentia ABCD, descriptum ad superficiem sphæræ, cuius diameter AC, vt est circumferentia ABCD, ad diametrum AC. Idemita esse quadratum diametri AC, circuli maximi in sphæræ, ad superficiem sphæræ, vt est diameter AC, ad circuferentiam ABCD. Sit euim EF, diametio AC, & recta FG, circuferentiæ ABCD , æqualis, & super FG, construatur quadratum GH, capiatur que FI, ipsi EF, æqualis; erit que EI, quadratum diametri EF, vel AC. Perfecta autem sigura, vt vides, erit tam rectangulum GI, sub diametro FI, maximi circuli, & circumferentia FG, quam rectangulum EH, sub diametro EF, eiudem circuli maximi, & circumferentia FH, æquale per preæcedentem, superficiei conuexæ sphæræ. Cum ergo sit, vt GH, quadratum ex circumferentia FG, descriptum ad rectangulum EH, superficiei conuexæ sphæræ æquale, ita GF circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi, constat primum."　"Item cum sit, vt EI, quadratum diametri EF, maximi, ad IG, rectangulum superficiei conuexæ sphæræ æquale, ita EF, diameter maximi circuli ad FG, circumferentiam, paterid, quad secundo loco proporitur." (图 1.1.2)

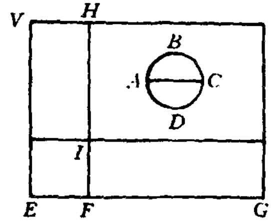



图 1.1.2

**例 2**　《测量全义》卷七第三节“分球上三角形各类”中有：

“用号(图 1.1.3)：作十者指直角，作 0 者指钝角，作一者指锐角。边云多者，谓过四之一；云少者，谓不及四之一。”

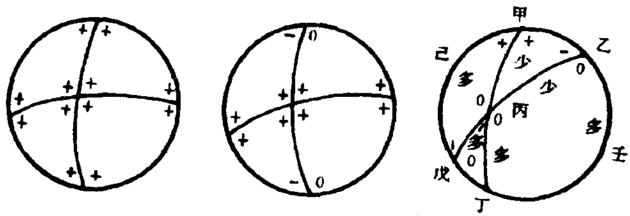



图 1.1.3

在玛金尼《球面三角学》卷一第五章第九条则有：

“Nota perpetuae ：anguli：recti＋，abtusi 0，acuti 一. Lateris Qundranti ：aequalis Q ，inaequalis；minoris mi，maioris ma.”(图 1.1.4)

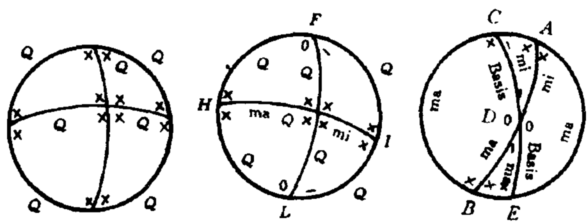



图 1.1.4

通过以上两个例子，可清楚看到《测量全义》是由几种拉丁文底本摘译编成，有些文句完全相同(如例 2)，有的译者略加改动。此外，还有些是编译者编的，而不是译自某书。

**《比例规解》**　比例规是伽利略发明的一种简单计算器，1606 年出版了《Le Operazioni del Compasso Geometrico e Militere》(比例规演解)一书。这书是用意大利文写的。本章第二节说到他有一部拉丁文《De proportionum instromento a se invento》(比例

规发明)于明代末年传入中国。这两本书是否同一种，我们无法对照核实，严敦杰(1917～1988)根据意大利文《伽利略全集》第二卷所载之《Le Operazioni del Compasso Geometrico e Militere》与《比例规解》进行对照，发现有四个方面两者一样，或基本相同。例如，《比例规解》论十线的十线名称：平分线、分面线、更面线、分体线、更体线、分弦线(分圆线)、节气线(正弦线)、时刻线(切线线)、表心线(割线线)、金属线，与伽利略著作对照，其中有关的情况如下：

| 《比例规解》 | 伽利略著作 |
|---|---|
| 平分线 | 算术线<br>(linee arithmetiche) |
| 分面线 | 几何线<br>(linee geometriche) |
| 更面线 | 多面线<br>(linee poligrafiche) |
| 分体线 | 立体线<br>(linee stereometriche) |
| 金　线 | 金属线<br>(linee metalliche) |

由上述事实，严敦杰认为《比例规解》的底本，“似即参考伽氏著作而得”[①]。

**《筹算》**　这里所说的筹算不是中国传统的计算工具，而是纳披尔于1617年所发表的一种算具，通称为Napier's Bones或Napier's Rods，其著作名称是《Rabdologia》[②]。但这书在《北堂图书馆书目》中没有记载，可能是由另外的渠道传入中国的其他本子。

---

① 严敦杰. 伽利略的工作早期在中国的传播. 科学史集刊，1964(7)：8～27

② 郭世荣. 纳披尔筹在中国的传播与发展. 中国科技史料，1997，18(1)：12～20

至于天文历法方面译著的底本也可以进行这样的对照研究，容易发现，是采用了第谷的体系，有些计算方法则是哥白尼的，但未采用日心说。

# 第二章　西方初等数学进入中国

1582 年以后，利玛窦等西方传教士进入中国，积极开展学术传教。在这一过程中将西方许多实用之学传入中国，其中最重要的学问就是西方的初等数学。明朝末年，内政腐败，农民战争、民族斗争等，各种社会矛盾激化。在科学领域里，涉及封建王权统治的历法问题成为争论的热点。明朝《大统历》是将元朝王恂、郭守敬编制的《授时历》稍加修改而成的。《大统历》在久远的年代中沿用，却极少修改，致使误差积累越来越大。到明中期，历法推算就已经很不准确了。至明末，改历已成为一个急需完成的工作。但由于封建王朝历代禁止民间私习历法，至明末，朝野上下难求修历人才。1629 年，在徐光启、李之藻的推荐下，崇祯皇帝启用龙华民、邓玉函、汤若望、罗雅谷等传教士入钦天监修历。西方数学以此为契机，进入中国官方学术。

## 第一节　传入的算术内容

### 一、《同文算指》

介绍西方初等数学的一部力作是《同文算指》。《同文算指》，利玛窦授，李之藻演，1614 年于北京出版。

《同文算指》取材于克拉维斯的《实用算术概论》和程大位的《算法统宗》。克拉维斯是利玛窦的老师，其著作是当时欧洲较有影响的实用算术著作。《算法统宗》是明代流传极广的实用数学著作。《同文算指》成为二者的结合。《同文算指》第一次向中国人介绍了西方的笔算，对后来中国数学的发展具有很大的影响。《同

文算指》分“前编”、“通编”和“别编”三编。“前编”介绍了笔算的定位方法和笔算的加减乘除四则运算方法；“通编”是全书的中心内容，共有8卷18节，叙述了分数、比例、级数求和、盈不足、方程、开方、开带从平方等算法。“别编”是“测圆诸术”，内容很少。

从内容上看，《同文算指》介绍的西方数学并未超过中国古代数学水平。许多中国古代数学中有而西方没有的算法，也被李之藻收编了进去。例如，“方程”、“带从诸变开平方法”，以及高次开方法等等。所以，除笔算及其验算法以外，《同文算指》实无多少新内容。

## 二、笔算的记数法和笔算加减乘除运算

《同文算指》初编介绍了西方初等数学中的笔算记数法。笔算采用位置制记数，从右向左，常用十进制，记为个、十、百、千、万等。《同文算指》未采用阿拉伯数字，数字以汉字〇、一、二、三、四、五、六、七、八、九等标记。例如，6008记为“六〇〇八”。

分数的笔算写法是分母在上，分子在下，例如$\frac{4}{7}$表示为$\boxed{\frac{\text{七}}{\text{四}}}$。

笔算加减乘除运算与现代方法相同（为方便起见，我们将例子的数字记法改为现在通用的阿拉伯数字）。

加法：6008<br>5009<br>4009<br>308<br>239<br>108<br>108<br>309<br>4128<br>3009<br>209<br>308<br>———<br>（并总得数）23752

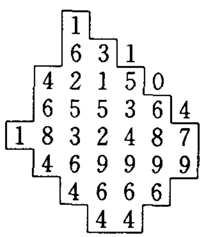
$$
\begin{array}{rl}
\text{减法：}\ 27158 & \text{（原数）} \\
4023 & \text{（减数）} \\
\hline
23135 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{乘法：}\ 3069 & \text{（原数）} \\
45 & \text{（乘数）} \\
\hline
15345 & \\
12276\phantom{0} & \\
\hline
138105 &
\end{array}
$$

除法为 16 世纪意大利之削减法，即帆船法[①]。例如，

$$1832487 \div 469 = 3907\,\frac{104}{469},$$

列式如下：



$\left(3907\,\frac{104}{469}\right.$

16 世纪以前，这种算法在欧洲极为流行，其计算次序如下：

(1)

```
1 8 3 2 4 8 7
  4 6 9
```

(2)

```
   6
1’8’3 2 4 8 7      (3
   4’6 9
```

① 李俨. 中国数学大纲. 北京：科学出版社，1958. 409～410

（3）

```
   4
   6'5
1'8'3' 2 4 8 7      (3
   4'6' 9
```

（4）

```
   4 2
   6 5 5
1'8'3'2'4' 8 7      (3
   4'6'9'
```

（5）

```
     1
     6 3
   4 2 1
   6'5'5'3
1'8'3'2'4'8 7       (39
   4'6'9'9'
     4'6'
```

（6）

```
      1
      6 3
    4 2 1
    6 5 5 3
  1 8 3 2 4 8 7     (390
    4 6 9 9 9'
      4 6 6'
        4'
```

（7）

```
      1
      6 3'1
    4 2 1 5'0
    6 5 5 3'6'4
  1 8 3 2 4 8'7'    (3907 104/469
    4 6 9 9 9 9'
      4 6 6 6'
        4 4'
```

这些内容在稍后的《太西算要》、《崇祯历书》中都有体现。

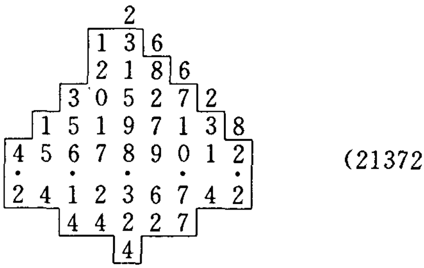
## 三、笔算开方法

《同文算指》通编卷六、卷八介绍了笔算开平方法、开立方法，系帆船法[①]。例如，

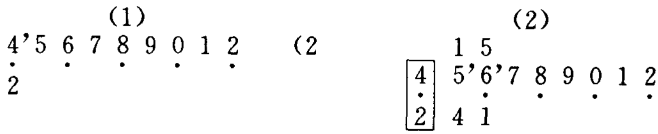
$$\sqrt{456789012}=21372\text{ 余 }26628,$$

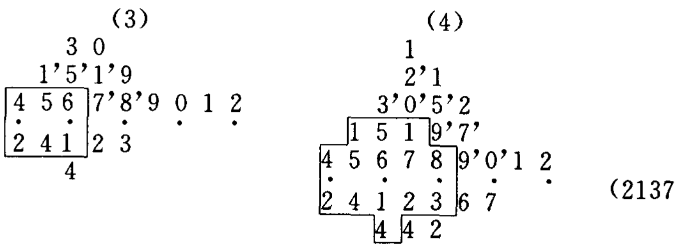
列式如下：

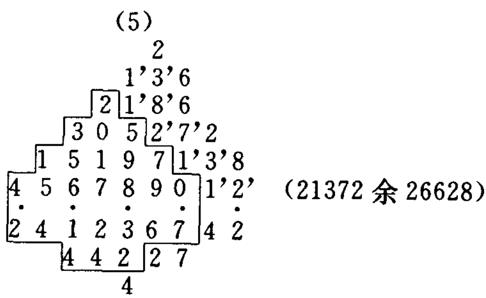
① 李俨. 中国数学大纲. 北京：科学出版社，1958. 409～410



其计算次序如下：







《同文算指》通编卷八还给出了整数开方不尽时的近似算法。其中给出公式：

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}，\text{或}\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}。$$

由此二式所得之根，或太大，或太小，令太大之根为 $X$，太少之根为 $Y$，所大之值为 $S$，所少之值为 $T$，则由以下二式递求得较密之平方根①：

$$\sqrt{a^2+r}=X-\frac{S}{2X}，\text{或}\sqrt{a^2+r}=Y+\frac{T}{Y+a+1}。$$

《同文算指》开方法对日后开方术影响极大，如其后的《算法纂要总纲》“第十一，开平方法”中有 $\sqrt{682276}=816$。列式与上述稍有不同：

```
                8   1   6
             ─────────────
             6 8 2 2 7 6
               •   •   •
             6 4
           ─────────
  1 6 2 ┌    4 2 2
  ──────┘    3 2 4
  1 6 4 6 ┌    9 8 7 6
  ────────┘    9 8 7 6
             ───────────
               0 0 0 0
```

又《数理精蕴》卷二十三中有 $\sqrt{14734}=24.51$ 余 9.860149。列式也有所不同：

```
                      2     4       .5        1
                    1 4 7 3 4. 0 0 0 0 0 0

                      8
 1 4 5 6         ┌0 6 7 3 4
 ────────────────┘ 5 8 2 4
 1 7 6 4 2 5       ┌0 9 1 0 0 0 0
 ──────────────────┘ 8 8 2 1 2 5
 1 8 0 1 4 8 5 1      ┌0 2 7 8 7 5 0 0 0
 ─────────────────────┘  1 8 0 1 4 8 5 1
                       ───────────────────
                         0 9 8 6 0 1 4 9
```

① 李俨. 中国数学大纲. 北京：科学出版社，1958. 412～413

《同文算指》通编卷八《广诸乘方法》介绍高次乘方开方法，且无次幂限制，采用了减根开方法。小仓金之助曾将《同文算指》与克拉维斯的《实用算术概论》进行比较，发现后者并无高次乘方开方法的内容，前人多以为该内容取于《算法统宗》。

**四、数量成比例、比例式及其性质**

《同文算指》通编卷一及《几何原本》卷五都介绍了数量（线段、面积、体积等）成比例、比例式及其性质。例如，

《几何原本》卷五第三界说："比例者，两几何以几何相比之理"，即定义两个量之间有比的关系。

第六界说："四几何，若第一与第二偕第三与第四，为同理之比例。则第一、第三之几倍，偕第二、第四之几倍。其相视或等，或俱为大，或俱为小，恒如是。"定义了四个量成比例，即 $a_1:a_2=a_3:a_4$。

《几何原本》卷五还详细地定义了二次比、三次比、更比、逆比、合比、分比、换比、首末比、调动比例等。

《几何原本》卷五的命题部分证明了许多比和比例的性质。诸如，命题 12 证明连比例性质。原命题是："第十二题，数几何所为比例皆等，则并前率与并后率之比例若各前率与各后率之比例。"即如果 $a:b=c:d=e:f$，则 $(a+c+e):(b+d+f)=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$。

命题 16 证明更比例的成立："四几何为两比例等，即更推前与前、后与后为比例，亦等。"即如果 $a:b=c:d$，则 $a:c=b:d$。

命题 17 和 18 证明分比例和合比例的成立。"第十七题，相合之两几何为比例等，则分之为比例亦等。"即如果 $(a+b):b=(c+d):d$，则 $a:b=c:d$。"第十八题，两几何分之为比例等，则合之为比例亦等。"即如果 $a:b=c:d$，则 $(a+b):b=(c+d):d=a:b=c:d$。

**五、等差数列、等比数列及其前 $n$ 项和公式**

《同文算指》通编卷五介绍了等差、等比数列及公差、公比、前 $n$ 项和及第 $n$ 项求法。

对等差数列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…

公差 $d=a_n-a_{n-1}$，

前 $n$ 项和 $S_n=(a_1+a_n)n/2$，

第 $n$ 项 $a_n=a_1+(n-1)d$。

对等比数列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…

公比 $d=a_n/a_{n-1}$，

前 $n$ 项和 $S_n=\dfrac{a_1(1-d^n)}{1-d}$，

第 $n$ 项 $a_n=a_1d^{n-1}$。

在稍后的《太西算要》一书中也有这些内容。

**六、比例规、纳披尔算筹与数学表**

比例规是伽利略在 1597 年发明的。它由能开合的两脚尺构成，尺上有刻度，利用相似三角形进行计算。17 世纪，比例规在欧洲很流行。1630 年，罗雅谷在中国写了《比例规解》，介绍比例规的用法。《比例规解》所依底本是《De propotionum instrumento a se invento》，该书原藏北京北堂。比例规在编制《崇祯历书》过程中，发挥了重要的计算作用。目前故宫博物院藏有各种质料和不同类型的比例规几十具。

纳披尔于 1617 年出版过关于纳披尔算筹的著作，详细介绍纳披尔算筹的用法。这种计算工具和用法在欧洲得到了推广使用。1629 年，罗雅谷翻译、汤若望修订成《筹算》。该书所依底本不详。汤若望在 1654 年重修《崇祯历书》为《西洋新法历书》时，又写成《筹算指》1 卷，详细介绍了纳披尔算筹的用法。纳披尔算筹作为一种高效的计算工具，在修订《崇祯历书》过程中，得到了充分利用。

纳披尔算筹与中国古代算筹完全不同。它是在一些长条形板片上书写或刻上表示从 1×1 到 9×9 的乘法表，另有从 0 到 9 的数码写在其他板上。在进行计算时，将这些写有数码的小板片拼合起来。如想做 51793×8 的乘法运算时，先将写有乘法表的小板片放成 9 列，再将写有从 1 到 9 的小板片放在所有列的最左面，用它可以很容易地找到所需要的行。然后，选出带有 1，3，5，7，9 的五列，并按照 51793 的顺序摆开。依最左面的列读第八行：

| 4/ | 0/ | 5/ | 7/ | 2/ |
|---|---|---|---|---|
| /0 | /8 | /6 | /2 | /4 |

从右到左按斜线相加，得最后结果 414344。当乘一个多位数时，这样的过程需要每一位乘数重复一次。为了便于相乘，特别是对于被乘数有同样数字时，每位数字都要有几套小板片。纳披尔算筹也可以用于除法。在对大数进行乘除时，用它可以提高运算效率。目前故宫博物院藏有各种质料和不同类型的纳披尔算筹多套。

在修订《崇祯历书》的过程中，比例规和纳披尔算筹逐步被中国学者所认识、接受，并使用，成为两种新型计算工具。

在崇祯七年(1634 年)七月进呈《崇祯历书》书目中有《方根表》，但未收入《四库全书・子部・西洋新法算书》，笔者未见此书传本。二次与三次方根表在 16～17 世纪的欧洲是常见的数学计算用表。《方根表》罗雅谷、汤若望指导监生推算而成的可能是二次与三次方根表。该表应是为修订历书而制作的数学用表。在《崇祯历书》中还有《割圆八线表》和《割圆八线小表》。这些是三角函数表。

## 第二节　传入的几何内容

### 一、《几何原本》及其他介绍几何学的著作

明末，在华传播最广的西方数学是几何学，其中最主要的著作是《几何原本》。

明末，另有一些著作在华传播古希腊几何学，但其中内容多取于上述《几何原本》译本，或取于该书的底本及其他多部西方数学著作。例如，明末的孙元化著有《几何体论》与《几何用法》，内容均取于《几何原本》6 卷译本。《几何用法》有孙元化序，言“予先师受几何于利泰西，自丙午始也，戊申(1608 年)纂辑用法，别为一编，以便类考”①。可知，书成于 1608 年。《几何体论》大概与此相近。二书原有抄本，存东方图书馆，现不知下落。又如，《几何要法》4 卷，艾儒略述，瞿式谷笔受。崇祯辛未年(1631年)出版，郑洪猷称：“其书大部取《几何原本》，而删存其要。”又《四部总录算法编》载有郑洪猷撰《几何要法》，推测就是此书。

此外，16 世纪末至 18 世纪初翻译编写的一些有关测量的著作中也介绍了一些西方几何学知识，诸如《大测》、《圜容较义》、《测量法义》、《测量全义》等书。

### 二、欧几里得平面几何学

明末传入的西方几何学知识是古希腊几何学，包括欧几里得平面几何学和部分立体几何学。

《几何原本》6 卷译本介绍了欧几里得平面几何学的全部内容。卷一开篇“界说”(定义)了平面几何的 36 个基本概念，诸如点、线、面、直线、平面、平面角、圆、三角形等；给出了平面

① 丁福保，周云清．古今算学书录·算学合注考．见：四部总录算法编．北京：文物出版社，1984

几何的4条公设(称为"求作")和19条公理(称为"公论")。与目前标准的希思《欧几里得原本13卷》(Thomas Little Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, 1956)相比较①，该《几何原本》6卷译本的界说36条. 希思本合并为23条，即6卷译本界说的19～22合为第19条，23～25合为第20条，26～28合为21条，29～33合为第22条，34改为第23条，而35，36是多余的，希思本不包括。6卷译本求作的前3条与希思本相同，而第4条"求作四"却不在希思本内，原文为"设一度于此，求作彼度，较此度或大或小. [凡言度者，或线或面或体，皆是]。"希思本求作的第5条，即现在通称的第五公设，而6卷译本不在求作中，而在公论(即公理)中，为第十一公论，它的主要部分是:"有二横直线，或正或偏。任加一纵线，若三线之间同边两角小于两直角，则此二横直线，愈长愈相近，必至相遇。"因此，在不同版本的《几何原本》中，第五公设和第十一公理是一回事。

该《几何原本》6卷译本中的19条公论包括了希思本中的5条公理，分别是:"第一论，设有多度，彼此俱与他等，则彼与此自相等。""第二论，有多度等，若所加之度等，则合并之度亦等。""第三论，有多度等，若所减之度等，则所存之度亦等。""第八论，有二度自相合，则二度必等。""第九论，全大于其分。"其余14条公论却不在希思本内，如"第十二论，两直线不能为有界之形"、"第十三论，两直线只能于一点相遇"。

卷一的主要内容是介绍三角形、平行四边形的作法，以及三角形和平行四边形的性质，诸如，三角形外角大于任一不相邻内角、三角形两边之和大于第三边、大边对大角、大角对大边、三角形三个内角和等于180°、等腰三角形两腰相等并且两底角相

---

① 欧几里得. 几何原本. 兰纪正，朱恩宽译. 西安：陕西科学技术出版社，1990. 1～3

等、同底上且在相同两平行线之间的平行四边形彼此相等，等等。此外，卷一还介绍了一些基本命题，诸如，平行线所成内错角相等、同位角相等、同旁内角和等于180°，等等。卷一中48个命题与希思本一致。

卷二开首的“第一界”和“第二界”定义了矩形和拐尺形，分别称为“直角形”和“罄折形”。卷二的14个命题主要是关于平面直线形的等积变换，诸如，求作一个正方形，使之等于几个矩形的面积和；划分一个正方形，使之等于几个矩形的面积和；等等。例如，

“第三题，一直线任两分之，其原线任偕一分线矩内直角形与分余线偕一分线矩内直角形及一分线上直角方形相等。解曰：甲乙线任两分于丙，题言元线甲乙任偕一分线如甲丙。矩内直角形与分余丙乙偕甲丙矩线内直角形及甲丙上直角方形并等。”

如图1.2.1矩形甲己的面积等于正方形甲丁与矩形丙己的面积和。

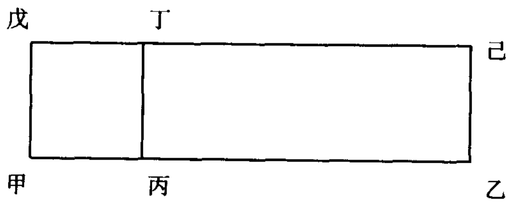



图 1.2.1

卷二内容与希思本一致。

卷三介绍圆及其性质。开首“界说”十则定义了等圆、切线、圆相切(称为“切圆”)、弦心距、弓形(称为“圆分”)、弓形的角(称为“圆分角”)、弓形角(称为“负圆分角”)、张于弧上的角(称为“乘圆分角”)、扇形(称为“分圆形”)、相似弓形等。与希思本相比较，缺少定义5“较大的弦心距”。卷三命题38个与希思本一致，证明一些关于圆的性质。诸如，求圆心；圆周上任意两点的连线落在

圆内；两圆相交或相切，则不同心；两圆相切，则连心线或延长线经过切点；圆内等弦的弦心距相等，反之亦然；圆上同一弧上的角相等；圆内接四边形的内角和是180°；在等圆中，相等的圆心角或圆周角所对弧相等，反之，相等的弧所对的圆心角或圆周角相等；等等。

卷四介绍圆内接、外切形及其性质。卷首“界说”七则定义了两个直线形的内接和外接(分别称为“内切”和“外切”)、圆的内接直线形(称为“内切”)和外切形、直线形的内切圆、外接圆(称为“外切圆”)、线段拟和于圆(称为“合圆线”)。卷四16个命题介绍的圆内接形、外切形性质，如，求作一个圆的内接三角形、外切三角形；求作一个三角形的外接圆、内切圆；求作圆的内接正方形、外切正方形；求作一个正方形的外接圆、内切圆；求作已知圆的内接正五边形、外切正五边形；求作已知正五边形的外接圆和内切圆；求作已知圆的内接正六边形、正十五边形；等等。卷四内容与希思本一致。

卷六介绍平面相似形及其性质。卷首“界说”六则，定义了相似直线形、逆相似形(称为“互相视之形”)、中外比(称为“理分中末线”)、图形的高、比例之命数、平行方形大于线或小于线。后两个“界说”为希思本所未有。卷六有命题33个，证明了相似形的许多性质，诸如，两个三角形对应角相等，则三角形相似，对应边成比例，反之也成立；相似三角形互比如同其对应边的二次比；相似多边形的比如同其对应边的二次比；求作二线段的第三比例项；求作已知三线段的第四比例项；分已知线段为理分中末比；等等。该33个命题的内容与希思本一致。

在翻译《几何原本》的过程中，利玛窦与徐光启创制了平面几何学的汉文名词，其中很大一部分沿用到今日，并影响到日本等国，诸如点、直线、曲线、平行线、角、三角形、四边形等等。但也有一些名词是后来改定的，例如当时的“平边三角形”现在

改为“等边三角形”；当时的“比例”现在改为“比”；当时的“圆内切直线形”后来改为“内接直线形”等。

在《测量全义》卷四、卷五中介绍了一些平面形面积的计算方法[①]，有：

正方形面积$=a^2$；

长方形面积$=ab$；

平行四边形面积$=hb$；

菱形面积$=\frac{ab}{2}$；

梯形面积$=\frac{a+b}{2}h$；

三角形面积$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s=\frac{a+b+c}{2}$；

直角三角形面积$=\frac{ab}{2}$；

正三角形面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3}{2}a\cdot\frac{a}{2}\cdot\tan 30°$；

正 $n$ 边形面积$=\frac{na}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\tan\alpha$，其中 $\alpha$ 是正 $n$ 边形一内角；

圆面积$=\frac{2\pi r}{2}\cdot r$；

大小两圆：$\frac{2R}{2r}=\frac{C}{c}$；

$\frac{892}{71}<\frac{\text{以圆周长为边长的正方形面积}}{\text{圆的面积}}<\frac{88}{7}$；

椭圆面积$\approx\frac{11}{14}(2a\cdot 2b)$；

扇形面积$=\frac{l\cdot r}{2}$，其中 $l$ 是扇形的弧长。

---

① 白尚恕.《测量全义》底本问题初探. 科学史集刊，1984(11)：151

## 三、立体几何

明末所传入的立体几何知识主要是一些几何体的体积求法与体积变换。

《测量全义》卷六介绍的立体的体积计算公式有①：

柱体积$=Sh$；

锥体积$=\frac{1}{3}Sh$；

两个相似体：$V : V'=a^3 : a'^3$；

台体积$=V_{大锥体}-V_{小锥体}$；

正四棱台体积$=V_{中央立方}+V_{四面堑堵}+V_{四角阳马}$；

正方体积$=a^3$；

长方体积$=a^2b$；

堑堵体积$=\frac{a^2b}{2}$；

阳马体积$=\frac{1}{3}Sh$；

球的大圆面积$=\frac{1}{4}$球面积；

大圆外切正方形面积：球面积$=1 : 3\frac{10}{71}\approx 1 : 3\frac{1}{7}$；

球体积$=\frac{4}{3}\pi r^3$；

球冠面积$=\frac{4\pi r^2}{n}$；

球扇形体积$=\frac{1}{3}\pi R^2 r$；

球缺体积$=\frac{1}{3}\pi R^2 r-\frac{1}{3}\pi R^2(r-h)$.

以边长为100，可以求得以下正多面体的体积：

---

① 白尚恕.《测量全义》底本问题初探. 科学史集刊，1984(11)：152

正四面体体积≈117 472；

正六面体体积=1 000 000；

正八面体体积≈471 425；

正十二面体体积≈7 686 389；

正二十面体的体积≈523 809.

正八、十二、二十等正多面体的体积求法是将正多面体分别划分为以正三角形、或正方形、或正五边形为底的多个相等的正锥体，然后，求出正锥体的体积，再合为整体求积。例如，如图1.2.2所示，一个边长为100的正八面体可以划分为两个相等的底边为100、高为$50\sqrt{2}$的正四棱锥。每个正四棱锥的体积是$\frac{1}{3}\times 100^2\times 50\sqrt{2}$，所以，正八面体的体积是$\frac{\sqrt{2}}{3}\times 100^3$，近似等于471 425。《测量全义》给出了这一结果："八面等之提，各面为三边等形，有十二棱、六隅，各边设一百，因几何，求其容为四七一四二五有奇。"①

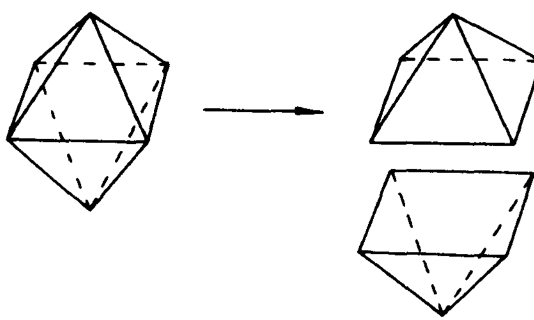


图 1.2.2

正十二面体和正二十面体由中心与各顶点连线分别分成十二

① 测量全义. 见：四库全书·新法算书. 文渊阁本影印本. 卷九十二. 十三页

个正五棱锥和二十个正三棱锥，然后来进行计算。其中，正二十面体的体积计算错误，后来梅文鼎在他的《几何补编》中作了修正。上述堑堵、阳马的体积计算公式则采自中国古代数学。

《测量全义》还给出了体积单位及换算："一千实寸为一实尺，一千实分为一实寸，则以立方之体再自之耳。"①此处，实尺、实寸、实分即体积单位立方尺、立方寸、立方分。

## 第三节　传入的三角学内容

### 一、平面三角学知识

明末《崇祯历书》中的《大测》和《测量全义》最早介绍了西方三角学。

《大测》卷一介绍平面三角学一般知识。当时欧洲还没有采用专门的三角函数符号，各书都是用线段长(八线)来规定各个三角函数的意义，有关公式都是用文字来表达的。"八线"就是与一个角有关的八条线段，分别称为"正弦"、"余弦"、"正切"、"余切"、"正割"、"余割"、"正矢"、"余矢"，如图 1.2.3 示。

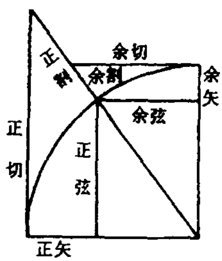



图 1.2.3

《大测》主要说明八线的性质、造表方法和用表方法。在《大测》卷一、卷二中有"六余率"法、三率法、二简法求八线造表。

"六余率"法编制三角函数表，即以 $r=10$ 为半径，求圆内接正六、四、三、十、五、十五边形的边长，从而求得 60°，90°，120°，36°，72°及 24°的弧所对弦长，各取其半，为 30°，45°，60°，18°，36°及 12°弧的正弦线值，然后据以作正弦线表。

① 测量全义. 见：四库全书・新法算书. 文渊阁本影印本. 卷九十二. 三页

三率法，即公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. 又称“三要法”。

二简法，即公式 $\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)=\sin\alpha$，

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta。$$

《大测》卷二“测平篇”给出了平面三角的正弦公式、余弦公式和正切定理。

正弦公式：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；

余弦公式：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

在《测量全义》中，还给出了半角公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}，其中\ s=\frac{a+b+c}{2}。$$

积化和差公式

$$\sin A\cdot\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)].$$

清初，薛凤祚从传教士穆尼阁学习对数和三角学，时称平面三角形为正线三角形。以对数立算，有如下各式：

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A;$$

$$\log\tan\frac{A-B}{2}=\log\frac{a-b}{2}+\log\tan\frac{180°-r}{2}-\log\frac{a+b}{2};$$

$$\log\tan\frac{A}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{[\log(s-b)+\log(s-c)]-[\log s+\log(s-a)]\},$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}。$$

当时所传入的三角学，知者很少，除梅文鼎外，多引旧说。

1722 年，《数理精蕴》完成，其中有以几何方法证明：

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{r}{2}=\tan\frac{A-B}{2}$。

同治年间，平面三角学再次传入中国，并在中国学者之间形成广泛的研习之风。这是后话。

**二、球面三角学知识**

《测量全义》是最早介绍球面三角学的著作。这部书的卷七、八、九集中介绍了球面三角学的一些计算公式和一些具体的球面三角解法。

卷七“测曲线三角形”分为九节，有“圈内线相当之理”、“《圆球原本》借论题”、“分球上三角形之各类”、“球上斜三角形”、“球上三角形相易之法”、“球上直角形各边正弦等线之比例”、“球上直角形相求约法”、“球上斜角形各边正弦等线之比例”、“斜角形相求约法”。在每节里都有一些解球面三角形的问题，并配有例题。通过这些题论述球面几何的基本知识和球面三角学的基本公式，以及球面三角的具体解法。

其“球上直角形相求约法”说：球上直角三角形，有三角三边，此六者有三，可推其余，交互为三十求，各以乘法得之。[①]

第一，有 $A$，$B$
- (1)求 $a$　$1:\sin B=\sec A:\sec a$，
- (2)求 $b$　$1:\sin A=\sec B:\sec b$，
- (3)求 $c$　$1:\tan B=\tan A:\sec A$；

第二，有 $B$，$a$
- (4)求 $A$　$1:\csc B=\sec a:\sec A$，
- (5)求 $b$　$1:\sin a=\tan B:\tan b$，
- (6)求 $c$　$1:\sec B=\tan a:\tan c$；

第三，有 $B$，$b$
- (7)求 $A$　$1:\sec b=\cos B:\sin A$，
- (8)求 $a$　$1:\tan b=\cot B:\sin a$，
- (9)求 $c$　$1:\sec B=\sin b:\sin c$；

① 李俨．中算史论丛(第三集)．北京：科学出版社，1953．218～219

$$\text{第四，有} B, c \begin{cases} (10)\text{求} A & 1 : \sec C = \cot B : \tan A, \\ (11)\text{求} a & 1 : \cos B = \tan C : \tan a, \\ (12)\text{求} b & 1 : \sin C = \sin B : \sin b; \end{cases}$$

$$\text{第五，有} A, a \begin{cases} (13)\text{求} B & 1 : \sec a = \cos A : \sin B, \\ (14)\text{求} b & 1 : \tan b = \cot A : \sin b, \\ (15)\text{求} c & 1 : \csc A = \sin a : \sin c; \end{cases}$$

$$\text{第六，有} A, b \begin{cases} (16)\text{求} B & 1 : \csc A = \sec b : \sec B, \\ (17)\text{求} a & 1 : \sin b = \tan A : \tan a, \\ (18)\text{求} c & 1 : \sec A = \tan b : \tan c; \end{cases}$$

$$\text{第七，有} A, c \begin{cases} (19)\text{求} B & 1 : \sec c = \cot A : \tan B, \\ (20)\text{求} a & 1 : \sin c = \sin A : \sin a, \\ (21)\text{求} b & 1 : \cos A = \tan c : \tan b; \end{cases}$$

$$\text{第八，有} a, b \begin{cases} (22)\text{求} B & 1 : \csc a = \tan b : \tan B, \\ (23)\text{求} A & 1 : \csc b = \tan a : \tan A, \\ (24)\text{求} c & 1 : \sec a = \sec b : \sec c; \end{cases}$$

$$\text{第九，有} a, c \begin{cases} (25)\text{求} B & 1 : \tan c = \cot a : \cos B, \\ (26)\text{求} A & 1 : \csc c = \sin a : \sin A, \\ (27)\text{求} b & 1 : \cos a = \sec c : \sec b; \end{cases}$$

$$\text{第十，有} b, c \begin{cases} (28)\text{求} B & 1 : \csc c = \sin b : \sin B, \\ (29)\text{求} A & 1 : \tan c = \cot b : \cos A, \\ (30)\text{求} a & 1 : \cos b = \sec c : \sec a\text{。} \end{cases}$$

其“球上斜角形各边正弦等线之比例”和“斜角形相求约法”中有公式：

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c};$$

$$1^2 : \sin b \sin c = \operatorname{vers} A : [\operatorname{vers} a - \operatorname{vers}(c-b)],$$

或 $$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

或 $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos C}{\sin b \cdot \sin c},$$

或　　$\text{vers } A=\dfrac{\text{vers } a-\text{vers}(c-b)}{\sin b\cdot\sin c}$，

或　　$\text{vers } A=\dfrac{\text{vers } a-\text{vers}(c-b)}{\frac{1}{2}[\cos(c-b)\pm\cos(c+b)]}$，

对于后式 $c+b<\frac{\pi}{2}$，用"＋"号；$c+b>\frac{\pi}{2}$，用"－"号。

卷八"测球上大圆"，包括"解正球上大圈相交之度分"和"解欹球上大圈相交之度分"两节，配有21题。这些题都是利用解球面三角形的各种方法，解决由赤道、黄道、地平圈以及各地子午圈所形成的球面三角形问题。

卷九"测星"，共有17题，是利用球面三角形解法，推求某星的经、纬度或距离的问题。

**三、三角函数表**

《大测》卷二"表用篇"详细讲解了三角函数表及作法。《测量全义》卷二"割圆八线小表"是一个每隔15′的四位三角函数表。而《割圆八线表》则是一个每隔1′的五位三角函数表。如表1.2.1和表1.2.2。

**表1.2.1　割圆八线小表**

| 度 | 分 | 正弦(sin) | 切线(tan) | 割线(sec) |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0′ | —— | —— | —— |
| | 15′ | 0.0043 | 0.0043 | 1.0000 |
| | 30′ | 0.0087 | 0.0087 | 1.0000 |
| | 45′ | 0.0130 | 0.0130 | 1.0001 |
| 1° | 0′ | 0.0174 | 0.0174 | 1.0001 |
| | 15′ | 0.0218 | 0.0218 | 1.0002 |
| | 30′ | 0.0261 | 0.0262 | 1.0003 |
| | 45′ | 0.0305 | 0.0305 | 1.0005 |
| 2° | 0′ | 0.0349 | 0.0349 | 1.0006 |
| | 15′ | 0.0392 | 0.0393 | 1.0007 |

续表

| 度 | 分 | 正弦(sin) | 切线(tan) | 割线(sec) |
|---|---|---|---|---|
| | 30′ | 0.0436 | 0.0437 | 1.0009 |
| | 45′ | 0.0480 | 0.0480 | 1.0011 |
| 3° | 0′ | 0.0523 | 0.0524 | 1.0013 |
| | 15′ | 0.0567 | 0.0568 | 1.0016 |
| | 30′ | 0.0610 | 0.0612 | 1.0018 |
| | 45′ | 0.0654 | 0.0655 | 1.0021 |
| 4° | 0′ | 0.0697 | 0.0699 | 1.0024 |
| | 15′ | 0.0741 | 0.0743 | 1.0027 |
| | 30′ | 0.0784 | 0.0787 | 1.0030 |
| | 45′ | 0.0828 | 0.0831 | 1.0034 |
| 5° | 0′ | 0.0871 | 0.0875 | 1.0038 |

**表 1.2.2 割圆八线表**

| 0° | 正 弦 (sin) | 正切线 (tan) | 正割线 (sec) | 余 弦 (cos) | 余切线 (cot) | 余割线 (csc) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0′ | 0.00000 | 0.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 0000.00000 | 0000.00000 | 60′ |
| 1′ | 0.00029 | 0.00029 | 1.00000 | 0.99999 | 3437.74667 | 3437.74682 | 59′ |
| 2′ | 0.00058 | 0.00058 | 1.00000 | 0.99999 | 1718.87319 | 1718.87348 | 58′ |
| 3′ | 0.00087 | 0.00087 | 1.00000 | 0.99999 | 1145.91530 | 1145.91574 | 57′ |
| 4′ | 0.00116 | 0.00116 | 1.00000 | 0.99999 | 859.43630 | 859.43689 | 56′ |
| 5′ | 0.00145 | 0.00145 | 1.00000 | 0.99999 | 687.54887 | 687.54960 | 55′ |
| 6′ | 0.00175 | 0.00175 | 1.00000 | 0.99999 | 572.95721 | 572.95809 | 54′ |
| 7′ | 0.00204 | 0.00204 | 1.00000 | 0.99999 | 491.10600 | 491.10702 | 53′ |
| 8′ | 0.00233 | 0.00233 | 1.00000 | 0.99999 | 429.71757 | 429.71873 | 52′ |
| 9′ | 0.00262 | 0.00262 | 1.00000 | 0.99999 | 381.97099 | 381.97230 | 51′ |
| 10′ | 0.00291 | 0.00291 | 1.00000 | 0.99999 | 343.77371 | 343.77516 | 50′ |
| 11′ | 0.00320 | 0.00320 | 1.00001 | 0.99999 | 312.52137 | 312.52297 | 49′ |
| 12′ | 0.00349 | 0.00349 | 1.00001 | 0.99999 | 286.47773 | 286.47948 | 48′ |

续表

| 0° | 正　弦 (sin) | 正切线 (tan) | 正割线 (sec) | 余　弦 (cos) | 余切线 (cot) | 余割线 (csc) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13′ | 0.00378 | 0.00378 | 1.00001 | 0.99999 | 264.44080 | 264.44269 | 47′ |
| 14′ | 0.00407 | 0.00407 | 1.00001 | 0.99999 | 245.55198 | 245.55402 | 46′ |
| 15′ | 0.00436 | 0.00436 | 1.00001 | 0.99999 | 229.18166 | 229.18385 | 45′ |
| 16′ | 0.00465 | 0.00465 | 1.00001 | 0.99999 | 214.85762 | 214.85995 | 44′ |
| 17′ | 0.00494 | 0.00494 | 1.00001 | 0.99999 | 202.21875 | 202.22122 | 43′ |
| 18′ | 0.00524 | 0.00524 | 1.00001 | 0.99999 | 190.98419 | 190.98680 | 42′ |
| 19′ | 0.00553 | 0.00553 | 1.00002 | 0.99998 | 180.93220 | 180.93496 | 41′ |
| 20′ | 0.00582 | 0.00582 | 1.00002 | 0.99998 | 171.88540 | 171.88831 | 40′ |
| 21′ | 0.00611 | 0.00611 | 1.00002 | 0.99998 | 163.70019 | 163.70325 | 39′ |
| 22′ | 0.00640 | 0.00640 | 1.00002 | 0.99998 | 156.25908 | 156.26228 | 38′ |
| 23′ | 0.00669 | 0.00669 | 1.00002 | 0.99998 | 149.46502 | 149.49837 | 37′ |
| 24′ | 0.00698 | 0.00698 | 1.00002 | 0.99998 | 143.23712 | 143.24061 | 36′ |
| 25′ | 0.00727 | 0.00727 | 1.00003 | 0.99997 | 137.50745 | 137.51108 | 35′ |
| 26′ | 0.00756 | 0.00756 | 1.00003 | 0.99997 | 133.21851 | 133.22229 | 34′ |
| 27′ | 0.00785 | 0.00785 | 1.00003 | 0.99997 | 127.32134 | 127.32526 | 33′ |
| 28′ | 0.00815 | 0.00815 | 1.00003 | 0.99997 | 122.77396 | 122.77803 | 32′ |
| 29′ | 0.00844 | 0.00844 | 1.00003 | 0.99996 | 118.54018 | 118.54440 | 31′ |
| 30′ | 0.00873 | 0.00873 | 1.00003 | 0.99996 | 114.58865 | 114.59301 | 30′ |
| | (cos) | (cot) | (csc) | (sin) | (tan) | (sec) | 89° |

# 第三章 中国对西方数学的最初研究

明末西方数学首次传入中国，中国学者在学习西方数学的同时，将其与中国传统数学相比较、融合，形成了一些独到的见解。

## 第一节 对于笔算的研究

### 一、明末研究西方笔算的著作——《太西算要》

在明末研究西方笔算的著作中，孙元化的《太西算要》较有代表性。

《太西算要》，又题《泰西算要》①，作者是明末著名将领孙元化。孙元化，字初阳，南直隶嘉定八都人，徙居邑城。万历四十年(1612年)进士，官至山东布政司参政，领登莱都兵备。崇祯五年(1633年)九月因受累于登莱参将孔有德吴桥兵变被杀。孙元化曾师事徐光启，擅长历算与兵法，一生著述颇丰，但文稿毁失殆尽。

关于《太西算要》的成书，我们只能从孙元化所作“自识”了解到一些情况。“自识”说：

“丁未(1607年)留都门，徐师食之教之，授以几何，因得旁及历法算术诸书，盖入门而趾不自持也。不三年利先生死，又数年庞、熊诸先生去，从游星散。无论相见，即闻者鲜矣。向者手辑历算种种，既为人借抄，久失，今欲反乞于人未由也，嗟乎，人

① 《太西算要》现存《徐光启著译集》内。《徐光启著译集》由上海文物管理委员会于1983年出版。

之云亡，道亦沦谢。识大有人，请从其小。因检其最难忆者亟先之。穷两日夜，首得算法，遂为《怀西》一集，并述所由，时庚申(万历四十八年，即公元1620年)七月即日，增加倍计法。乙丑(天启五年，即公元1625年)，各增三乘四分开法，因再订开方法。”

从“自识”可知孙元化所习西方数学系徐光启传授，又查《太西算要》的算术内容——十进制记数法，加、减、乘、除、开方运算及等比数列、等差数列前n项和公式及比例式等大部分内容已见于《同文算指》。又徐光启《同文算指》序有言：“惜余与振之(李之藻)出人相左，振之两度居燕，译得其(指利玛窦)算术如干卷，既脱稿，余始间请而共读之，共讲之。”[1]可知，徐光启所学西方之初等数学内容与《同文算指》所述一致。从这儿可推测，《太西算要》与《同文算指》同出一处。《同文算指》成于1614年，《太西算要》晚11年。

由“自识”可知，《太西算要》一书是分三次完成的，第一次是万历庚申年(1620年)七月完成的《怀西集》，第二次是同月所增补之“加倍计”，第三次是于万历乙丑年(1625年)又增加“开三乘方”、“开四乘方”两目，并对原开方内容作了修订。

《太西算要》一书不分章节，但按“总法”、“太西算法”、“加”、“减”、“乘”、“分”、“平差计”、“加倍计”、“开方”、“开平方”、“开立方”、“开三乘方”、“开四乘方”、“试”与“三数算法”15目编写而成。除“加倍计”与“开三乘方”、“开四乘方”为后来所增补外，其余当为《怀西集》大要，但非原貌，概于1625年，孙元化增补“开三乘方”、“开四乘方”时，对原有开方内容作有修改。

关于《太西算要》一书的流传情况，我们所知甚少，只能做一些推测。

---

① 徐光启．同文算指序．见：同文算指．《海山仙馆丛书》本

现不见其书刊本，史料亦未记有刊本，可以推测，此书写成之后，未曾刊行，只在少数人中传抄。现《徐文定杂著》中所存抄本，盖出于徐光启或孙元化之手，而出于后者之手的可能性为大，大概是其抄送徐光启请教的。

**二、《太西算要》的数学内容**

《太西算要》在其15目中介绍了当时传入中国的西方初等数学的一些主要知识，其广度与深度都未超过《同文算指》，仅“开三乘方”、“开四乘方”与“开方”中部分内容为孙元化的独自研究成果，较有深度。现依目列其数学内容如下：

1. “总法”与“太西算法”

介绍笔算之十进位制及六、八、十六、六十进位制记数法。

2. “加”、“减”、“乘”、“分”

介绍笔算的加减乘除运算方法。其中减法系个位对齐从左向右进行，各位上数字相减，被减数不足则向前一位数字借一为十，此与《同文算指》所介绍减法不同。乘法有破头乘(即由左向右乘数各位数与被乘数相乘，结果相加)与倒尾乘(即现代初等数学之乘法)。

3. “平差计”与“加倍计”

分别介绍了等差数列与等比数列，及其前n项求和公式。

4. “开方”

介绍高次乘方$a^n$及其几何意义，明确指出：“平方即自乘，立方即再乘，若三乘次以上或曰形如立体。”(《太西算要·开方》)即将四次方以上高次乘方几何意义均解释为立体形。如$a^4$为$a^2$，a，a三边所形成长方体。在《同文算指》通编“广诸乘方法”有相同的解释。

5. “开方·论方廉隅”

“开方·论方廉隅”解释了减根开方法之几何意义。

6. 开方法

“开平方”、“开立方”、“开三乘方”、“开四乘方”解释了减根开方法，其中开平方、开立方已见于前人之作，减根法开三、四乘方已见于《同文算指》通编“广诸乘方法”。一般认为其来于程大位《算法统宗》，因为其中借用珠算开方。减根开方法源于《九章算术·开方术》，其原理即牛顿二项展开式，此方法在中国古代数学之开方法中得以充分贯彻与发展，如刘益正负开方术、贾宪增乘开方术、秦九韶正负开方术，在此基础上，逐步形成一套机械化的运算规则。

7. “试”

验算方法，即弃九法、弃七法，已见于《同文算指》卷上“乘”，讲加减乘除运算结果的验算方法，提出两种，即身数除与大小数除。但《太西算要》推广至有余数的除法的验算，如

$$1698777\div 3384=502\cdots\cdots 9(\text{余数}),$$

用身数除法验算：

左$=1+6+9+8+7+7+7-9K=9$，

右$=5+0+2-9K=7$，

左×右$=63$，

左×右+余数$=63+9=72$，以9除尽，则验算结果正确。

8. “三数算法”

即比例式中已知三项求第四项。

### 三、《太西算要》对开方的几何解释

《太西算要》中孙元化自己的数学研究工作即为其对高次开方中方、廉、隅的几何解释，与在此之上的开三、四乘方方法。

首先是开高次方中的方、廉、隅的几何涵义。《太西算要》中说：“开方则有方法矣。方之不尽，乃有隅，隅之不尽，乃有再隅，然无论方隅。总之，平方皆自乘，立方则皆再乘，三乘方皆三乘，四乘方皆四乘而已，方隅之交不得不有廉，廉者方边与隅边相乘也。”如图1.3.1，在开立方中方、廉、隅的意义很明确。但对开

三乘、四乘等高次方而言，其几何意义并非如开平方、开立方那样。孙元化说："忆与利、徐两先生访三乘方之形，亦疑焉，今以意度之，或当如是，遂立三乘、四乘开法附于平方、立方之后。"(《太西算要·开方》)我们补设图形予以说明。如图 1.3.1，以 $A^4=A^2\cdot A\cdot A$ 为例释其对方、廉、隅之解释。孙元化言："三乘方亦有方之三面，亦有隅之三面，而长面之方尚与隅隔，故其间别有余方，余方即方面三中之一也。此一面为余方，则彼两面为方平廉，有余方则亦有两平廉。各两平廉之间，即各有一长廉，过此则接隅矣，然以隅法乘方面，又有隅旁方廉。以方法乘隅面，又有隅旁两方廉。"(《太西算要·论方廉隅》)其中方、廉、隅各项如图 1.3.2 所示。

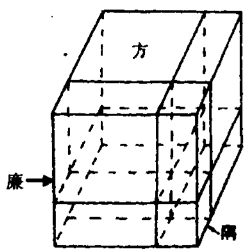



图 1.3.1

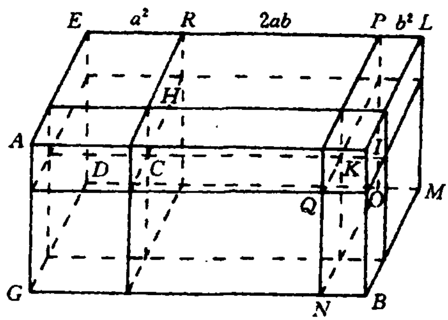



图 1.3.2

方法为 $a$，隅法为 $b$，余方法为 $2ab$。

线段 $ER=a^2$，$PL=b^2$，$EL=ER+RP+PL=(a+b)^2$；

长方体 $AM$ 的体积 $V_{AM}=(a+b)^2(a+b)(a+b)=(a+b)^4$；

长方体 $CD$ 为方，体积 $V=a^2\cdot a\cdot a$；

长方体 $IK$ 为隅，体积 $V=b^2\cdot b\cdot b$；

长方体 $CE$，$CG$ 为方平廉，其体积 $V=a^2\cdot a\cdot b$；

长方体 $AC$ 为方长廉，体积 $V=a^2\cdot b\cdot b$；

长方体 $CO$ 为余方，体积 $V=2ab\cdot a\cdot a$；

长方体 $CP$，$CN$ 为余方平廉，体积 $V=2ab\cdot b\cdot a$；

长方体 $HQ$ 为余方长廉，体积 $V=b^2\cdot 2ab$

$KM$ 为隅旁方廉，体积 $V=a^2\cdot b^2$；

长方体 $KB$，$KL$ 为隅旁平廉，体积 $V=b^2\cdot b\cdot a$。

其次是开三、四乘方方法。孙元化借助于其对开三、四乘方中方、廉、隅之几何意义的解释，使开方中减根各步，运算明晰。例如 279841 开三乘方即 $\sqrt[4]{279841}$，如表 1.3.1 所示。

**表 1.3.1　开三乘方 279841 的原术文、说明和运算步骤**

| 原 术 文* | 说　　明 | 运　　算 |
|---|---|---|
| 如积二十七万九千八百四十一为实 | 279841 | 实二七九八四一 |
| 隔三位有二点，知有二商，则初商为千（万）数。** | 确定商数的位置，个位为次位，向前隔三位为初位，即在万位 | 初商位　次商位 |
| 先以三乘为实商得二〇为方法，书于首点下，二〇三乘得一十六万，先除讫，则存一一九八四一为余实。 | 试商，首位为 2，<br>$20^4=160000$<br>$\begin{array}{r}279841\\-160000\\\hline 119841\end{array}$ | 二　　三<br>一六 |
| 次约余实，商得三，为隅法，书于次点下。 | 试次商，为 3 | |
| 次以方法二〇再乘之八〇〇〇与隅法三相乘得二万四千，倍之得方两平廉。 | 方平廉＝方法$^3$×隅法＝$20^3\times 3=24000$ 共有两个方平廉 | 四八 |
| 次以方法二〇自乘之四〇〇与隅法三自乘之九相乘，得三千六百，方长廉。 | 方长廉＝方法$^2$×隅法$^2$＝$20^2\times 3^2=3600$ | 三六 |

续表

| 原术文* | 说　明 | 运　算 |
|---|---|---|
| 次以方法二〇与隅法三相乘得六〇，以隅法三与方法二〇相乘得六〇并之得一二〇为余方法，次以余方法一二〇与方法二〇自乘之四〇〇相乘得四万八千，为余方。 | 余方法＝2×方法×隅法＝2×20×3＝120<br>余方＝2×方法×隅法×方法$^2$＝2×20×3×20$^2$＝480 | 四八 |
| 次以余方法一二〇，与方法二〇相乘得二四〇〇，又与隅法三相乘得七千二百，倍之得一万四千四百，为余方两平廉。 | 余方平廉＝余方法×方法×隅法＝120×20×3＝7200 共两个 | 一四四 |
| 次以余方一二〇，与隅法三自乘之九相乘得一千零八十，为余方长廉。 | 余方长廉＝余方法×隅法$^2$＝720×3$^2$＝1080 | 一〇八 |
| 次以隅法三自乘之九与方法二〇自乘之四〇〇相乘，得三千六百，为隅旁方廉。 | 隅旁方廉＝隅法$^2$×方法$^2$＝3$^2$×20$^2$＝3600 | 三六 |
| 次以隅法三再乘之二十七，与方法二〇相乘得五百四十，倍之得一千零八十，为隅旁两平廉。 | 隅旁平廉＝隅法$^3$×方法＝3$^3$×20＝540 | 一〇八 |
| 次以隅法三，三乘得八十一，为隅俱除，尽，无余，得高广边各二十三，长边五百二十九。 | 隅＝隅法$^4$＝3$^4$＝81 从实中减去各方、廉、隅，恰减尽，则 23 为所求根。相当于所作几何体，高宽各为 23，长为 23$^2$＝529 | 八一<br>二七九八四一 |

＊见《太西算要·开三乘方》。

＊＊此处原文有误，应为万数。

我们以图 1.3.1 和 1.3.2 为据分析了孙元化开 4 次方的作法，如表 1.3.1，比较直观地说明了开方问题。他是把 4 次方变成

3 次来处理,1 个线段的 2 次方为面积,而孙元化却把它当做长度。由于 4 次或 4 次以上的问题不能用几何解释，故孙元化的作法仅是一种尝试。利、徐早对此“亦疑焉”，是有道理的。

## 第二节　对于几何的研究

徐光启和利玛窦译成《几何原本》以后，该书便成为中国人研习西方几何学的范本。明末学者研究几何学的情况大致可以分为两种。其一是仔细揣摩几何学的内容，并将其与中国传统的勾股术相比较，形成了一些比较性的研究成果，例如徐光启的《测量异同》和《勾股义》。其二是深入理解《几何原本》的内容，衔其纲而通其意，在此基础上，写成反映《几何原本》主体内容的简要著作，以便中国人学习。在这样的著作中也有作者依据几何学原理而解答的几何问题。这些问题是《几何原本》中没有的。这一类著作如清初杜知耕的《几何论约》。孙元化曾著有《几何用法》与《几何体论》二书，推测是该类著作，但二书均已毁失[①]，无从考证其具体内容。

### 一、《测量异同》

《测量异同》作于万历三十六戊申(1608 年),是徐光启在与利玛窦合译并完成《测量法义》之后，为进一步比较西方几何学与中国传统勾股测量方法的异同而写的。全书共六题，是徐光启总结二书中的解法列出的。明末,《九章算术》传本还未得以发掘,但由宋以来的数学著作中多讲到九章算法，徐光启对这些传世的九章算法是了解的。在《测量异同》一书的六道算题中，徐光启比较了中西解法的异同，其中前五题的解法在《测量法义》和九

① 胡道静. 孙元化著述目. 见:中国传统科技文化探胜. 北京:科学出版社,1992.

章算法中都有，徐光启特别指出了各题在《测量法义》中的位置。第六题的解法，《测量法义》有之，而九章算法稍有不同。所以，徐光启标记为“与前篇第十题后法同理”，并“稍改旧法以从今论”。[①]

在这里应指出的是，尽管徐光启在《测量异同》开篇讲到：“九章算法勾股篇中，故有用表、用矩尺测量数条。与今译《测量法义》相较，其法略同，其义全缺。学者不能识其所系。既具新论，以考旧文。”[②]但正如前文所言，实际上，徐光启所考“旧文”并不是《九章算术·勾股》，而是宋代以来数学著作中所引的九章算法。其中，很多内容来源于刘徽所写的《海岛算经》。例如，《测量异同》第六题“以重矩兼测无广之深、无深之广”，其解法不在《九章算术·勾股》，而在《海岛算经》。该题如下：

“有甲乙丙丁壁立深谷，不知甲乙之广，欲测乙丙之深，则用重矩法。先于甲岸上，依垂线立戊甲巳勾股矩尺。甲巳勾长六尺。从股尺上视勾末巳与谷底丙为一直线，而遇戊甲股于庚。庚甲高五尺。次于甲上，依垂线取壬。壬去甲一丈五尺。于壬上，依垂线更立一辛壬癸勾股矩尺。壬癸勾亦长六尺。从股尺上视勾末癸与谷底为一直线，而遇辛壬股于辛。辛壬高八尺。次以前股所得庚甲五尺与两勾间壬甲十五尺相乘，得七十五尺为实。以两股所得庚甲、辛壬相减之较辛子三尺为法，除之，即得乙丙深二十五尺。若以勾六尺，与两勾间十五尺相乘，得九十尺为实，以辛子三尺为法除之，即得甲乙之广三十尺。”

如图1.3.3，该题解法中用到两组三角形相似，即三角形庚巳甲与三角形庚丙丁相似，三角形辛癸壬与三角形辛丙丁相似。我

① 徐光启. 测量异同. 见：徐光启著译集. 上海：上海古籍出版社，1983. 卷八. 4B页（以下所引用《测量异同》各题均出于该书，不再个别注明）

② 同上. 1A页

们对三角形作字母标示，则有

$\triangle CBA \backsim \triangle CDE$，

$\triangle FHG \backsim \triangle FDE$，

有　$\dfrac{CA}{CE}=\dfrac{BA}{DE}$，$\dfrac{FG}{FE}=\dfrac{HG}{DE}$，

即$\dfrac{5}{5+y}=\dfrac{6}{x}$，$\dfrac{8}{8+15+y}=\dfrac{6}{x}$，

解得$x=36$，$y=25$，即广$DE=$36 尺，深$AE=25$ 尺。

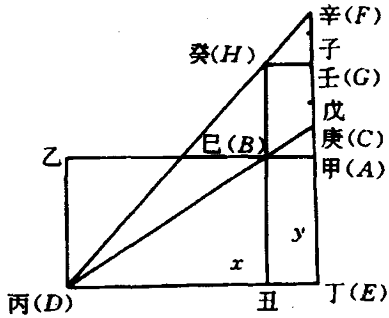



图 1.3.3

原题有误，甲乙之广，不是三十尺，而应是三十尺加上勾长六尺，即三十六尺。

该题解法与《测量法义》第十题的后一解法完全一致。《海岛算经》中有以重矩测深和以重矩测远两题，徐光启将两题解法作了修改，并结合起来，所以，他说："稍改旧法，以从今论"。两题如下①：

"今有望深谷，偃矩岸上，令勾高六尺。从勾端望谷底，入下股九尺一寸。又设重矩于上，其矩间相去三丈。更从勾端望谷底，入上股八尺五寸。问谷深几何？答曰："四十一丈九尺。术曰：置矩间，以上股乘之，为实。上、下股相减，余为法，除之。所得以够高减之，即得谷深。"

"今有望海岛，立两表齐，高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何？答曰：……去表一百二里一百五十步。术曰：……求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相

① 刘徽. 海岛算经. 见：李继闵. 九章算术校正. 西安：陕西科技出版社，1993. 519～520，524～525

多为法，除之，得岛去表数。”

《测量异同》另外五题，徐光启将“今译”解法与九章算法作了比较。

《测量异同》第一题“以景测高”。徐光启题有“与前篇第四题同”，即与《测量法义》第四题解法相同。其他各题凡题有“与前篇第某题同”，都是指与《测量法义》的比较。该题如下：

“欲测甲乙之高。其全景乙丙，长五丈。立表于戊，为丁戊，高一丈，表景戊丙长一丈二尺五寸。以表与全景相乘，得五万寸，为实，以表景百二十五寸为法，除之，得甲乙高四丈。”

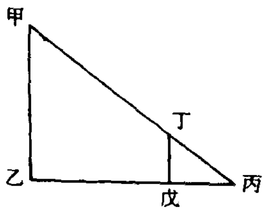



图 1.3.4

如图 1.3.4，三角形甲乙丙与三角形丁戊丙相似，有　甲乙/丁戊＝乙丙/戊丙，

则有　甲乙＝(丁戊×乙丙)/戊丙

＝(100×500)/125＝400(寸)。

就该题，徐光启指出：“此旧法与今译同。”

第二题“以表测高”：

“欲测甲乙之高。去乙二十五尺，立表于丙，为丁丙，高一丈；却后五尺，立于戊，使目在已。戊至已，高四尺。视表末丁与甲为一直线；次以丁丙表高十尺，减目至足丁辛(该处有误，应为丙辛——引者)四尺，得表目之较辛丙(该处有误，应为丁辛——引者)六尺，以乘乙丙二十五尺，得百五十尺为实。以丙戊五尺为法，除之得三十尺，加表十尺，得甲乙高四十尺。”

如图 1.3.5，三角形甲壬丁与三角形丁辛巳相似，则有

甲壬/丁辛＝壬丁/辛巳，

又有　壬丁＝乙丙，

所以有　甲壬＝(丁辛×乙丙)/辛巳＝(6×25)/5＝30(尺)。再加表高 10 尺，即为所求。

徐光启指出："与前篇第十题同"，并说，"此旧法以甲壬丁为大三角形，以丁辛巳为小三角形；今译以甲庚巳为大三角形，丁辛巳为小三角形。其实，同法同论。何者，甲壬与壬丁，若甲庚与庚巳也。"

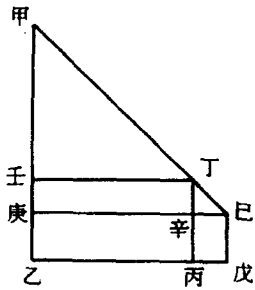



图 1.3.5

该题解法可见于《九章算术·勾股》题："今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木东三里，望木末适与山峰斜平。人目高七迟。问山高几何？"[①]

第三题"以表测深"：

"甲乙丙丁井，欲测深。其径甲乙五尺。立一表于井口，为戊甲，高五尺。从戊视丙，截甲乙径于巳。甲至巳得四寸。次以井径五尺减甲巳四寸，存巳乙四尺六寸。以乘戊甲五尺，得井深五丈七尺五寸。"

如图 1.3.6，三角形甲戊巳与三角形乙丙巳相似，则有

戊甲/乙丙＝甲巳/乙巳，

乙丙＝(乙巳×戊甲)/甲巳

＝(46×50)/4＝575(寸)，即为所求。

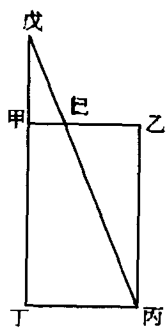



图 1.3.6

徐光启指出："与前篇第八题同"，并说："此旧法以戊甲巳为小三角形，巳乙丙为大三角形。今译当以戊甲巳为小三角形，戊丁丙为大三角形。其实，同法同论。何者？戊丁与丁丙，若丙乙与乙巳也。"即戊丁/丁丙＝丙乙/乙巳。

① 九章算术．影印本．上海：上海古籍出版社，1990

该题源出于《九章算术·勾股》，原题是："今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问井深几何？"解法也相同。[①]

第四题"以重表兼测无远之高、无高之远"：

"欲于戊测甲乙之高、乙丙之远。或不欲至，或不能至前，用重表法。先于丙立丁丙表，高十尺。却后五尺，立于戊，目在巳，巳戊高四尺，视表末丁，与甲为一直线。次从前表却后十五尺，立一癸壬表于壬，亦高十尺。却后八尺，立于子，去壬八尺，其目在丑。丑子亦高四尺。从丑视癸甲，亦一直线。次以表高十尺，减足至目四尺，得表目较癸辛或丁寅六尺。与表间度癸丁或壬丙十五尺相乘，得九十尺，为实。以两测所得巳寅、丑辛相减之较卯辛三尺为法，除之，得三十尺。加表高十尺，得甲乙高四十尺。若以两测所得之小率丙戊五尺，与表间度癸丁或壬丙十五尺，相乘得七十五尺，为实。以卯辛三尺为法，除之，即得乙丙远二十五尺。"

如图1.3.7，三角形甲辰丁与三角形丁寅巳相似，三角形甲辰癸与三角形癸辛丑相似，则有

甲辰/丁寅＝辰丁/寅巳，

甲辰/癸辛＝辰癸/辛丑， ①

设 甲辰为$x$，辰丁为$y$，

又有 丁寅＝癸辛＝10－4＝6尺，寅巳＝5尺，

辰癸＝$y$＋15尺，辛丑＝8尺。

将各量代入比例式组①，得到

$$x/6=(y+15)/5,$$

$$x/6=(y+15)/8. \quad ②$$

由比例式组②可以得到：

① 九章算术. 影印本. 上海：上海古籍出版社，1990

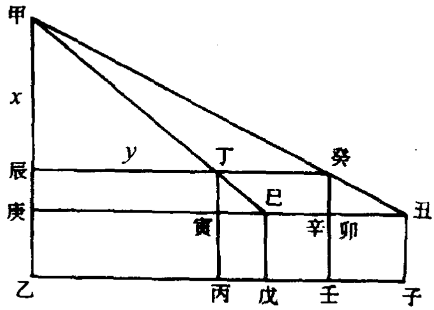



图 1.3.7

$x=(6\times15)/(8-5)=30$(尺)，即为甲辰之高，再加丁丙表高 10 尺，即为所求之高，40 尺。

$y=(5\times15)/(8-5)=25$(尺)，即为所求之远。

徐光启指出："与前篇第十题后法同"，并说，"此旧法测高，以癸辛或丁寅，与辛卯，偕甲辰与等壬丙之丁癸，为同理之比例。今译以癸辛或丁寅，与辛卯，偕甲庚与等戊子之巳丑，为同理之比例。其实同法同论。何者？甲辰与辰丁，若甲庚与庚巳也。辰丁与丁癸，若庚巳与巳丑也。平之，则甲辰与丁癸，若甲庚与巳丑也。"

该题与解法初源于《海岛算经》，原题是："今有望海岛，立两表齐，高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何？"

第五题"以四表测远"：

"欲测甲乙之远，于乙上立一表，次于丙、巳、丁上，各立一表，成乙丙巳丁直角方形。每表相去一丈。令丁、乙二表与甲为一直线。次于巳表之右戊上，视丙表与甲为一直线。戊巳相去三寸。次以乙丙、乙丁相乘，得一万寸为实。以戊巳三寸为法，除

之，得甲乙高三十三丈三分丈之一。”

如图 1.3.8，三角形甲乙丙与三角形丙巳戊相似，则有

甲乙/丙巳＝乙丙/巳戊。

又　丙巳＝乙丁，

所以，甲乙＝(乙丙×乙丁)/巳戊

$$=(100\times100)/3$$

$$=3333\frac{1}{3}(\text{寸})=33\frac{1}{3}(\text{丈})，$$

即为所求。

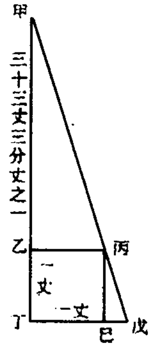



图 1.3.8

徐光启指出：“与前篇第十四题同”，并说，“此旧法与今译同。”

该题源出于《九章算术·勾股》，原题是：“今有木去人不知远近。立四表，相去各一丈。令左两表与所望参相直。从后右表望之，入前右表三寸。问木去人几何?”①

二、《勾股义》

《勾股义》作于 1609 年。《几何原本》和《测量法义》译成以后，徐光启以西方几何学知识重新研读传世的九章勾股术，颇有体会：“勾股自相求，以至容方、容圆、各和、各较相求者，旧九章中亦有之。第能言其法，不能言其义也。所立诸法芜陋不堪。门人孙初阳氏删为正法十五条，稍简明矣。余因各为论撰其义，使夫精于数学者揽图诵说，庶或为之解烦。”②

孙初阳，即孙元化，他根据《几何原本》的基本原理，将传世勾股术删节为 15 种解法。徐光启又以《几何原本》的基本原理为这 15 种解法作了详细论证，写成《勾股义》。15 种解法是：勾

① 九章算术．影印本．上海：上海古籍出版社，1990

② 徐光启．勾股义．见：徐光启著译集．上海：上海古籍出版社，1983．卷八．1B 页

股求弦；勾弦求股；股弦求勾；勾股求容方；余勾余股求容方、求勾、求股；容方与余勾求余股、与余股求余勾；勾股求容圆；勾股较求股求勾；勾弦较求勾求弦；股弦较求股求弦；勾股和求股求勾；勾弦和求勾求弦；股弦和求股求弦；股弦较、勾弦较，求勾求股求弦；勾弦和、股弦和，求勾求股求弦。例如前 3 种解法[①]：

“第一题，勾股求弦。法曰：甲乙股四，乙丙勾三，求弦。以股自之得十六。勾自之得九。并得二十五，为实，开方，得甲丙弦五。”

“第二题，勾弦求股。法曰：如前图，乙丙勾三，自之得九。甲丙弦五，自之得二十五。相减，得较十六，开方，得甲乙股四。”

第三题，股弦求勾。法曰：“如前图，甲乙股四，自之得十六。甲丙弦五，自之得二十五。相减，得较九。开方，得乙丙勾三。”

此 3 题即《九章算术・勾股》中前 3 题。徐光启解法较详，并配有图形，如图 1.3.9。徐光启特别指出：“以上三论，俱见一卷四十七题。”并说明：“凡言某卷某题者，皆引《几何原本》为证，下同。”

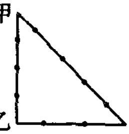


图 1.3.9

自第四题以后的 12 种中算法，只有“勾股求容圆”一术见于《九章算术・勾股》，其余皆为明末以前历代中算家，特别是宋元中算家，由勾股术基本算法演绎而来。下面以第十五题“勾弦和、股弦和，求勾、求股、求弦”为例来看徐光启如何以几何学说明中算传统的勾股算法。

“法曰：甲丙、乙丙勾弦和七十二，甲乙、甲丙股弦和八十一，求勾、求股、求弦。以两和相乘得五千八百三十二。倍之，得一万一千六百六十四，为实。平方开之，得弦和和一百〇八，以股弦和减之，得乙丙勾二十七，以勾弦和减之，得甲乙股三十六，以

① 《勾股义》诸题均引自该书，不再个别注明。

勾股和减之，得甲丙弦四十五。”

这一解法是中算的传统解法，以“出入相补”原理为基础，通过等积变换来实现的。在该题的“论曰”中，徐光启则以《几何原本》中的几何定理来证明了等积变换的正确。他说：

“两和相乘，为乙巳直角形，倍之，为丁戊直角形。以为实，平方开之，得巳庚直角方形(一边)，与丁戊等，即其边为弦和和者。何也？丁戊全形内有弦幂二、股弦矩内形、勾弦矩内形、勾股矩内形各二。与巳庚全形内诸形比各等，独丁戊形内余一勾幂、一股幂、并二较一，亦等。即巳庚方形之各边皆弦和和。”

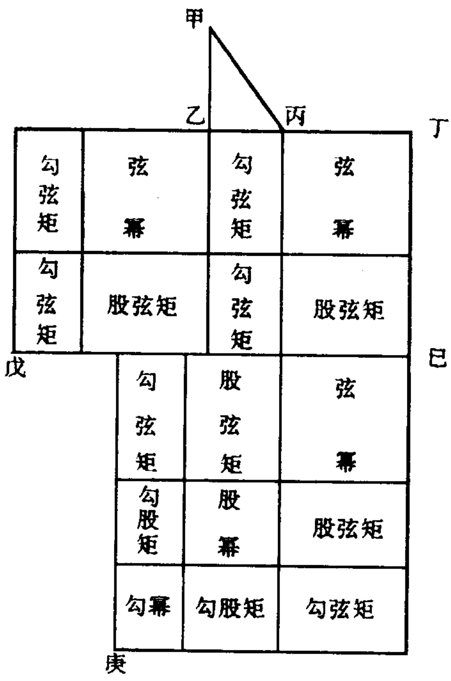



图 1.3.10

如图1.3.10，矩形(直角形)丁戊与正方形(直角方形)巳庚面积相等，因为在构成二者的小图形中，只是矩形丁戊有二弦幂，而正方形巳庚有一勾幂和一股幂。但是弦幂＝勾幂＋股幂，则矩形丁戊与正方形巳庚等积。对直角三角形甲乙丙，根据毕达哥拉斯定理(或勾股定理)，有弦幂＝勾幂＋股幂成立。所以，徐光启明确："独丁戊形内余一勾幂、一股幂，并二较一，亦等。"他注明"一卷四十七"字样，就是指根据《几何原本》第一卷第四十七题证明的毕达哥拉斯定理，可以有弦幂＝勾幂＋股幂成立。

又如第十二题"勾弦和求勾、求弦"：

"法曰：甲乙股三十六，乙丙、甲丙勾弦和七十二，求勾、求弦。以股自之得一千一百九十六，勾弦和自之得五千一百八十四，相减得三千八百八十八，半之得一千九百四十四，为实。以和为法，除之，得乙丙勾二十七。以减和，得甲丙弦四十五。"

该题的解法是以中算传统的出入相补原理为基础，以等积变换完成的。徐光启以《几何原本》中的定理解释了传统解法（如图1.3.11）：

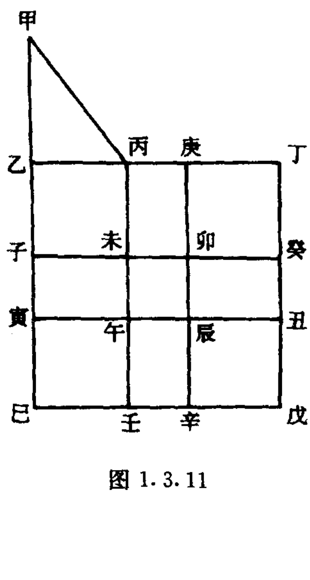



图1.3.11

"论曰：以勾弦和作乙丁一直线，自之为乙戊直角方形。次用勾弦度相减，取丙、庚两点，从丙、从庚作庚辛、丙壬二平行线。依此法作癸子、丑寅二平行线，即乙戊一形中，截成丙子、丑辛、丁卯、午巳勾幂四，庚未、辰壬、癸辰、未寅较勾矩内直角形四，卯午较幂一也。今欲于乙戊全形中，减一甲乙股之幂，则于卯巳弦幂内（一勾一较并为弦）存午巳勾幂，而减子午辛磬折形，即股幂矣。何者？卯巳弦幂内，当函一勾幂、一股幂也（一卷四十七）。又庚未与未寅等，即庚壬形亦股幂也。以庚壬形代磬折形，即丁辛、丙巳两形为和幂与股幂之减存形也。半之，即丙巳形。以等勾弦和之乙巳除之，得乙丙勾。"

在这里，徐光启也运用了《几何原本》第一卷四十七题中证明的毕达哥拉斯定理，并采用尺规作图（如平行线）来进行证明。

## 第三节　对中西数学的认识

### 一、对西方数学公理化、理论自明性、解释性的认识

明末西方数学传入中国，由于其在形式与内容上均有着与中国传统数学极大的差异，所以，很快便引起中国学者的关注。

在形式上，西方数学具有典型的公理化理论体系，以理论统率解题。这与中国传统数学的依题而设，在解题中依赖加注的办法来说明理论的形式恰成对比。徐光启、李之藻等人在与利玛窦等传教士共译西方数学著作之时，即关注到这一点。例如，徐光启、利玛窦共译《几何原本》6卷，着意突出其公理化系统这一特点，而没有依据中算传统对它加以改造。如第一卷的结构：

| 排列顺序 | 内　　容 |
|---|---|
| 1 | 界说（定义）三十六则 |
| 2 | 公设四则，"求作者不可言不可作" |

| 排列顺序 | 内　　容 |
|---|---|
| 3 | 公论(公理)十九则，“公论者不可疑” |
| 4 | 四十八个命题(论三角形性质) |
| 5(每个命题后) | 求作 |
| 6(部分命题后) | 推论及其求作 |

很明显，这是一个由“定义、公设、公理、命题、求作，推论”构成的公理化系统，其他各卷采用相同结构。

再如李之藻、利玛窦共同编译《同文算指》一书，虽取用《算法统宗》中大量内容，但在整体上仍保持以理论统率解题的作法。重点突出理论的推导、阐述，其次才是以解题说明理论。例如通编卷四“累借互征第七”，讲解一元二次方程。

首先给出一般性理论：

“累借互征，其术精矣，又有子母杂互隐奥，难知者，则两借虚数以征之，子实尚远也，或两浮而盈，或两缩而不足，或一盈一不足，俱以借数列上，以较原数多寡之差列下，而左右互乘焉，其法有二，凡俱盈俱不足者，以差数相减，余为法，以乘数相减，余为实，若一盈一不足者，以差数相异为法，以乘数相并为实，而以法除实，则二法相同。”

其后给出例题，并作解法，来说明理论。

中算中与此相同的算法，即盈不足术，始于《九章算术·盈不足》，后人多引用。但它从未提出一个系统的盈不足术，而是异题异术，以说明盈不足的各种情况，书中从未明确指出盈不足术的理论依据——“两借虚数以征之”。

《九章算术·盈不足》首列四题，其一为：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数物价各几何。”后列术：“盈不足，相与同共买物者，置所出率，盈不足各居其下，令维乘所出率，并以为实，并盈不足为法。有分者通之，副置所出率，以

少减多，余以约法实，实为物价，法为人数。”此术给出一盈一不足的情况，对其他情况，再设题列术。此体例形式与《同文算指·累借互征》不同。

虽然西方数学理论的公理化特点，并未为当时著译者明确加以阐述，但数学理论的自明性（即数学理论中的定义、公理、定理均意义明确）与解释性（数学理论解释具体算法）却为当时著译者们大为赞叹，并极力说明，而且，希望以此弥补中国数学的缺憾。从现代数学角度看，理论的自明性与解释性均来于公理化体系自身的逻辑推理。

利玛窦在“译《几何原本》引”中说：“窦自入中国，窃见为几何之学者，其人与书信自不乏，独未睹有原本之谕，既缺根基，遂难创造，既有裴述者，亦不能推明所以然之故，其是者，亦已无从别白，有谬者，人亦无从辨证。当此之时，遂有志翻译此书，质当世贤人君子，用酬其嘉信旅人之意也。”在这里，他极力推崇几何学等西方数学理论的自明性、解释性，并认为这样的学问才是中国学者首当学习的理论。

徐光启于“题《测量法义》”中说：“法而系之义也。……时《几何原本》六卷始卒业矣，至是后能传其义也。”此处，“法”即“测望诸法”，“义”即数学理论。其又于《勾股义》中言：“勾股自相求，以至容方容圆，各和各较相求者，旧九章亦已有之，第能言其法，不能言其义也。……余因各为论撰其义，使夫精于数学者，揽图诵说，庶或为之解题。”他也明确指出了西方数学的自明性和解释性的重要意义。

在这里应特别指出：公理化数学理论体系应具有明确、严格的概念。这一点虽未为当时著译者特别指出，但在其强调西方数学的义理明确的同时，不可缺少地关注到了。

**二、以西方数学研究中国数学**

徐光启、李之藻生在明末，其时中国数学严重衰退，《周髀》、

《九章》之理少有人知，即使宋元之天元术等亦已无人知晓，致使历法推算困难重重。“间有草泽遗逸，诵经知算之士，留心历理者，又皆独学寡助，独智师心，管窥有限，屡改爽终，未能有确然破千古之谬，而垂万礼之修养。”①造成这一状况，一方面是由于中国列朝禁私习天文历法，另一方面中国数学自身存在“重算不重理”的缺陷。

徐光启谈到“测量诸法”时说：

“法而系其义也。……是法也，与周髀九章之勾股测望异乎？不异也；不异何贵焉，亦贵其义也。刘徽、沈存中之流，皆尝言测望矣，能说一表，不能说重表也。言大小勾股能相求者，以小股大勾，小勾大股，两容积等，不言何以必等能相求也；犹之乎丁未以前泰子也；何故乎？无以为之籍也；岂惟君子，不能言之，即棣首、商高，亦不得言之也。周髀不言籍乎？非籍也；籍之中又有籍焉，不尽说几何原本不止也。”②

这表明徐光启已经清楚地认识到：中国数学之只重算法，不重义理。这造成中国数学在1000年的代代相习之间，算理越来越模糊、越混乱。西方数学注重公理化的形式逻辑结构，恰好可以成为中国数学的有益补充。

徐光启、李之藻等就此积极鼓吹吸收西方数学，以明算理，以修历法，又积极提倡吸收其他西方科学技术，以益世用。李之藻宣称：“其于鼓吹休明，观文成化，不无裨益。”③

徐光启于《刻几何原本序》中言：

“唐虞之世，自羲和治历，暨司空后稷工虞典乐，五官者非度

① 李之藻．请译西洋历法等疏．见：四库全书·子部·西洋新法算书·缘起一．影印本．上海：上海古籍出版社1987．卷788．5～6

② 徐光启．题《测量法义》

③ 同①。

数不为功，周官六艺，数与居一焉，而五艺著，不以度数从事。亦不得工也。……故尝谓三代而上，为此业者盛，有元元本本，师付曹习之学，而毕丧于祖龙之焰。汉以来，多任意揣摩，……至于今而此道尽废，有不得不废者矣。几何原本者，度数之宗，所以穷方圆平直之情，尽规矩准绳之用也。……私心自谓不意古学废绝二千年后，顿获补缀唐虞三代之阙典遗义，其裨益当世，定复不小。”

他又说：

“顾惟（利）先生之学，略有三种，大者修身事天，小者格物穷理。物理之一端，别为象数，一一皆精实典要，洞无可疑，其多解擘析，亦能使人无疑，而余乃亟传其小者，趋欲先其易信，使人绎其文，想见其意理，而知先生之学可信不疑，大概如是，则是书之为用更大矣。”

他指出利玛窦所列几何对于天文、历法、地理、建筑、水利、农业、财政、兵法、医药等等方面的作用。由此可见，徐光启、李之藻等人深信西方的几何学和其他的科学理论与技术可以成为中国志士经世治国的锐利武器。此即其所说的“西学补益王化”。

随着西方数学的传播，在明末历局和朝廷内有许多学者逐步持有与徐光启、李之藻等相同的看法。

许胥臣（任职通政司，身世不明）曾序《西学凡》，其中有言：“噫！礼失则求之于野，读《西学凡》而先学格致，教黜空虚，吾亦取其有合于古圣之教而已矣。”① 很明显，其读译西学本意就在于补益“古圣之教”这一中国正统思想。

又王征在《远西奇器图说录最》序中说：

“学原不问精粗，总期有济于世；亦不问中西，总期不违于天。兹所录者虽属技艺末务，而实有益于民生日用，国家兴作甚急也。

① 徐宗泽．明清耶稣会士译著提要．北京：中华书局，1989．294

倘执玉器之说而鄙之，则尼父系《易》胡以，又云备物制用，立成器以为天下利，莫大乎圣人。”①

其将西学理器与孔子之《易》、圣人之器相并提，以征其于教化民用之裨益。万历甲寅(1614 年)年间钦天监监副周子愚也说“西学补益王化”，他在《表度说》序中有：

“圭表，我中国本监虽有之，然无其书，理未穷，用未著也，余见大西洋诸先生，其诸书内具有此法，请于龙华民先生译其书，以补本典，用备历元。”②

他的意图就在以西学中制表、度量诸理论来补充中国天文历法的不足。

### 三、对西方数学方法与数学工具的认识

就数学方法而言，明末传入了西方古典数学的尺规作图，来求解几何学问题。同时传入笔算及 17 世纪出现的纳披尔算筹、比例规等，来解数值计算问题。这与中国传统数学以“出入相补”原理解决几何问题，以筹算、珠算解数值计算问题形成对照。

所谓“尺规作图”，就是用直尺、圆规作几何图形。这是由欧几里得几何学确立起来的几何学基本方法。欧几里得在《几何原本》中明确规定了直尺和圆规的效能：直尺能作直线；圆规能作圆。当然，仅此两条效能是不够的。事实上，在欧几里得的《几何原本》中包含着尺规的另外三条效能：(1)如果两条直线有交点，就能作出交点；(2)如果一个圆经过另一个圆的内部点和外部点，则这两个圆一定有两个交点；(3)如果一直线经过一个圆的内部点，则直线与圆有两个交点。在尺规的这五条效能之下，可以实现几何中的绝大部分作图问题，并进而解决几何量的计算问题。

所谓“出入相补”原理，就是“一个平面图形从一处移置他

---

① 李之勤．王征遗著．西安：陕西人民出版社，1987．220

② 徐宗泽．明清耶酥会士译著提要．北京：中华书局，1989．282

处，面积不变；又若把图形分割成若干块，那么，部分面积的和等于原来图形的面积。因而，图形移置前后诸面积间的和差有简单的相等关系。立体图形也是这样。”①

中国古有“规矩”，规即圆规，矩即成直角的拐尺。以规矩作图，中国古代数学中早有广泛使用。在《周髀算经》和《九章算术》及其后的著作中都可见。在“出入相补”原理的应用中，就要借规矩作图。就其作图的效用来说，规矩作图与尺规作图是一样的。但欧几里得几何学却为尺规作图作出了严格的理论基础与操作规范，这保证了几何理论体系的自明性与正确性。这一点是中国古代传统数学远远不及的。与此相比，“出入相补”原理缺乏严格的理论基础与操作规范，中国古代数学家在解几何问题时，不得不时常借助于数量计算，这导致后来条段法、天元术的出现。②

明末，随欧几里得几何学传入中国，尺规作图得到数学界的关注。

《几何原本》6卷所有问题均采用尺规作图方法加以解决，卷一首列“求作四则”保证了尺规作图的实施。徐光启在《测量异同》和《勾股义》中采用了尺规作图来解题，并将其与几何定理相结合。这一点在上节已说明。清朝以后的数学家，如梅文鼎、明安图、李善兰、华衡芳等人在解决几何、三角学等问题时都广泛使用尺规作图，“出入相补”渐少采用。这表明中国数学家已逐步认识到尺规作图的高效性和严格性。但是，应该指出，在有清一代二三百年间，却少有中国学者对尺规作图的理论基础、规则、效

---

① 吴文俊．出入相补原理．见：吴文俊编．《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社，1982

② 孔国平．从条段法到天元术．见：孔国平．李冶传：[学位论文]．呼和浩特：内蒙古师范大学数学系，1985

用范围等作过讨论。

笔算的传入改变了中国传统的计算方法。中国古代的计算工具是算筹，用算筹来进行计算的方法称为筹算。算筹是一些特制的木棍或竹棍。以算筹在地上或桌上摆放排列来记数，这称为筹式。用筹式标记运算中每一步，就可以进行加减乘除、开方运算了。在以筹算做大数字计算时，需要大量的算筹和地面，很不方便。

14 世纪的元代开始普及珠算。珠算是用珠算盘来进行计算，实际上，是由筹算的小型化和摆放位置的固定化演变而来的。珠算的原理与筹算完全相同，只不过是用算珠来记数。珠算盘配合多年中形成的运算口诀，使计算速度大为加快。

明末传入的笔算，以笔在纸上进行计算，使用方便快捷。所以，很快就得到广泛普及，成为数学家常用的计算方法。明末以后，已无人采用中国传统筹算进行数学计算，珠算在商业计算中使用广泛，笔算则在数学家中流传。

笔算在《同文算法》、《太西算要》中运用广泛，纳披尔筹算、比例规在各种应用等方面的推算中则较多运用。其后的数学著作，多采用笔算。

比例规、纳披尔算筹和数表于明末传入中国以后，即在《崇祯历书》的修订过程中发挥了重要作用。从此，这些数学工具的高效性和方便为中国学者所认识。在数学、天文、历法的大量计算中广泛使用这些工具。中国学者还制造了大批比例规和纳披尔算筹。目前故宫博物院藏有各种质料和不同类型的比例规几十具、各种材料和不同类型的纳披尔算筹多套。

明末，中国学者和在华传教士编译成一些数学用表，诸如，

《测圆八线小表》，在《测量全义》第三卷内，徐光启督修(1631年)；

《割圆八线表》6 卷，《崇祯历书》本；

《八线表》，《新法算书》本，汤若望等译撰。

这些数学用表在数学、天文、历法等计算中发挥了重要作用，其方便与高效为中国学者们大为推崇。

在这里有一位山东人应当提及，就是李笃培(1575～1631)，他以中法演西法，成《中西数学图说》12册，没有出版。全书主要讲中国传统数学，内容广泛，是为“会通中西”之作。但因未出版，影响不大。

# 第 二 编

# 中国数学家的会通中西工作

正当西方数学通过来华传教士传入中国，并进行历法改革和编译《崇祯历书》(已完成)之际，明朝于崇祯十七年(1644 年)三月灭亡，同时满族入关，爱新觉罗·福临(1639～1661)成为大清入关后的第一代皇帝，年号顺治。在位 17 年，但年号为十八年(1644～1661)。其子爱新觉罗·玄烨(1654～1722)嗣位登基，第二年(1662 年)改元康熙，在位 61 年，是中国历史上统治时间最长的帝王。

本编的时间跨度从 1644 年到 1700 年前后，约 50 余年。当时情况极为复杂，西方数学继续传入，中国传统数学仍在传播。中国数学家一方面吸收西方数学内容，另一方面又大力进行中西会通工作。这种工作在官民两方面都有，而本编主要讲述民间的数学工作。

## 第一章　清初几位数学家及其工作

本章所要讲述的数学家黄宗羲、李长茂、薛凤祚、王锡阐、方中通和下一章要讨论的梅文鼎等，都出生于明末，可以说是明代遗民。他们都在民间从事数学以及天文历法等研究，并取得了成就。明末清初期间，又有一些西方传教士来到中国，有的还带来

西方某些数学知识，因此也要在本章中有所涉及。

## 第一节 西方数学的继续传入和中国传统数学的传播

本节分为两部分。

先讲西方数学继续传入的简单情况。明末来华的传教士中，有些到清初还健在，例如龙华民、阳玛诺、艾儒略、汤若望等等。其中尤以汤若望最为活跃，入清之后他做了三件事，都是明末历法改革的继续，以此靠拢新的清朝政府。现分述于下。

汤若望做的第一件事是制作了一批仪器，记载说是顺治元年，实际是明末制作的。计有："浑天星一座，地平日晷、窥远镜各一具，并舆地屏图"①，都献给了清政府，有的至今还能在北京故宫博物院看到②。

汤若望做的第二件事是，他把准备给明朝的新历法献给了清朝政府。明朝灭亡前的一个多月，李天经曾向崇祯帝进《甲申经纬新历》各一册③。这是根据西方理论编出来的历法，未及推行明即灭亡。汤若望是制订此历法的主要西方人。入清后稍作修改，成为一种新法。就在这年农历八月发生日食，用明代《大统历》、《回回历》和新法进行测验，结果"惟西洋新法，一一吻合，大统回回两法，俱差时刻云"④。因此清政府决定用西洋新法编制新历法，这就是《时宪历》，于当年农历十月在全国颁行。又同年"十一月将钦天监印信着汤若望掌管，所属该监官员，嗣后一切进历

① 见《东华录·顺治三》。

② 李迪，白尚恕．故宫博物院所藏科技文物概述．中国科技史料，1981(1)：95～100

③ 见《西洋新法历书·奏疏》。

④ 同①。

占候选择等项，悉听掌印官举行”[①]。于是汤若望就成为中国天文历法机构的最高领导人。

在此后的10多年中中国便围绕新旧历法问题展开了激烈的斗争。1661年玄烨即位后斗争更加尖锐，以致酿成流血事件，汤若望也差点被杀头。但《时宪历》并未因此而废止。

汤若望做的第三件事是，把《崇祯历书》进行改编和增减而成《西洋新法历书》，于顺治二年(1645年)献给清政府(关于该书的内容等已在本卷第一编第一章述及，这里不再重述)。

明末清初，西方仍陆续派传教士到我国来，下面以来华年代先后次序为序分别加以介绍。

利类思(Lodovico Buglio，1606～1682)，号再可，意大利人。明崇祯十年(1637年)来华传教，清顺治五年(1648年)进入北京，懂得西方生物学，并第一个传入西方生物学等方面的知识[②]。

安文思(Gabriel de Magalhaes，1609～1677)，号景明，葡萄牙人。明崇祯十三年(1640年)来中国传教，曾与利类思一起进入四川，他们同年进入北京。他精通机械学[③]。

穆尼阁(Jean Nicolas Smogolenski，1611～1656)，字如德，波兰人。顺治三年(1646年)来华，先后在南京、福建传教，后来回到广东肇庆，在那里去世。他精通数学，在南京期间，中国的薛凤祚、方中通等曾向他学习[④]。

南怀仁(Ferdinand Verbiest，1623～1688)，字敦伯，比利时人。他于顺治十四年(1657年)来华，1659年到陕西传教，1660年

---

① 见《东华录·顺治三》。

② 林华，等. 历史遗痕——利玛窦及明清西方传教士墓地. 北京：中国人民大学出版社，1994. 32～33

③ 林华，等. 历史遗痕——利玛窦及明清西方传教士墓地. 北京：中国人民大学出版社，1994. 30～31

④ 李俨. 中国数学大纲(下册). 北京：科学出版社，1958. 391

奉召进入北京，协助汤若望修治历法。南怀仁正好遇上当时新旧斗争，因其进入中国较晚而未受株连，也是由于他的努力，才使康熙帝给汤若望等平反。南怀仁由此受到信任，在北京制造了一批天文仪器[①]，著有《灵台仪象志》一书，曾任高达正二品的工部右侍郎官职[②]。

闵明我(Philippus Maria Grimaldi,1639～1712)，字德先，意大利人。1669 年来华传教[③]。

徐日升(Thomes Pereyra,1645～1708)，字寅公，葡萄牙人。他于 1672 年抵澳门，约于第二年进入北京传教[④]。

除上列各人外，其他大约还有一二十人，光是新旧历法斗争案就涉及十五六人，其中包括汤若望、利类思和安文思。

17 世纪，西方数学发展史上有不少重大成就，其中最主要的有对数、解析几何和微积分，尤其是微积分最为突出。这些成就在当时大都通过教会传入我国，但微积分较晚。下面根据《北堂图书馆书目》(Catalogue of the Pei-T'ang Labrary,1947)介绍几种：

有关解析几何的著作。解析几何创始于笛卡尔和费马(P. de Fermat,1601～1665)，他们的原著虽未直接传入中国，但稍后有查理斯(C. F. M. de Chales,1621～1678)整理的笛卡尔《几何学》的单行本却多次传入。例如，

《Cursus seu Mundus Mathematicus (宇宙数学)》，有 1674，

---

① 这些天文仪器，目前仍安置在北京建国门古观象台上。

② 林华，等．历史遗痕——利玛窦及明清西方传教士墓地．北京：中国人民大学出版社，1994．34～35

③ 林华，等．历史遗痕——利玛窦及明清西方传教士墓地．北京：中国人民大学出版社，1994．128

④ 林华，等．历史遗痕——利玛窦及明清西方传教士墓地．北京：中国人民大学出版社，1994．127

1690 两种版本传入。

《Geometria（几何学）》，先后有 1649，1659，1683，1695 四种版本传入。

有关对数表和三角函数对数表的著作。这类著作，当时在欧洲很多，传入中国的也不少。例如，

斯特劳赫(Aegidius Strauch，1632～1682)的《Tabulae sinuum，tangentium logarithmorum et per universam mathesin》，有 1700 年的版本传入我国。

荷兰的沃拉克(Adriaen Vlack，1600～1667）的《Tabulae sinuum，Tangentium，et logarithmi sinuum，tangentium，& Numerorum ab unitate ad 10 000》[①]，其第一版为《Arithmetica Logorithmica》，于 1628 年在 Goudo 出版，有 1670 年的版本传入我国。

沃拉克的《Tabulae sinuum，tangentium，et secantium，et logarithmi》，传入中国的年代较晚。

沃拉克的《Trigonometria artificialis：sive Maganus canon trangulorum logarithmicus，Ad radium10 000 000 000，& ad dena Scrupula Sestructus》，有 1633 年的版本传入我国。

Adriaen Vlack 的英文写法为 Adrian Vlacg，他是当时欧洲多产的数学家，传入我国的著作也较多。

奥则南(J. Ozanam，1640～1717)的《Tables des sinus tangentes et secantes；et des logarithmes des sinus et des tangentes；& des nombres depuis l'unite jusques a 10 000》，它的第一版于 1670 年在里昂出版，有 1685 年版本传入我国。从书名来看，包括三部分内容，即正弦、正切和正割表；正弦和正切的对数表；10 000 以内的数的因数分解表。

---

① A. Vlack 的书直至 20 世纪 30～40 年代商务印书馆还有译本出售。

其他著名学者的著作传入我国的也很多，属于这一时期的不少。例如，

格利高里(James Gregory，1638～1675)的《Geometrae pars Universalia (大众几何)》，有1668年版本传入，但是他关于级数的研究则不见记载。

塔克(A. Tacquet，1612～1666)的《Arithmeticae theoria et praxis (算术的理论和应用)》，有1665，1683，1704多种版本传入我国。

巴罗(Isac Barrow，1630～1677)的《Elementorum Euclidii libri XV》，即15卷本欧几里得《几何原本》，有1676年的版本传入。

惠更斯(Christiann Huygens，1629～1695)的《De Circuli magnitudine inventa (论圆周大小)》，有1654年的版本传入。

牛顿的《自然哲学之数学原理》一书，进入18世纪后曾多次传入我国，而他的"流数术"(fluxion)由霍格逊(James Hodgson，1672～1755)的著作《The doctrine of fluxions》间接传入，该书主要是讲牛顿微积分方法的。

以上所述各书进入我国后产生多大影响不好说，似乎不大，但是对数却被我国数学家所掌握，以后将详细讨论。

在西方数学著作传入的同时，人们仍很关注中国传统数学，特别是珠算术的普及。在这50多年中，《算法统宗》有明末各次印本的流传，后来在康熙五十三年(1714年)又刊刻印刷。此外还有下列各书：

《算法全书》4卷，书前有蒋守诚于康熙十四年(1675年)作的序。

《算法指掌》5卷，又题《指掌算法》5卷，无撰者姓氏和出版年代，李俨认为是清初珠算说明书之一①。

《指明算法》2卷，无作者署名，但有校订者王晋升(讱庵)或

① 李俨. 中国数学大纲(下册). 北京：科学出版社，1958. 373

郑元美，有多种版本流传。本书第六卷曾提到明初夏源泽有同名的著作《指明算法》2卷，并认为校订本《指明算法》就是对夏源泽书的校订。

《简捷易明算法》4卷，题“武林沈士桂丹甫氏纂辑”，原稿成于康熙甲申(1704年)之前。

《刘虬江算法》2卷，刘纶校正，前有三存子于康熙甲午(1714年)所作的序。

《铜陵算法》2卷，不著撰者，版本也有多种，俞笃培(嘉庆)校正，有王晋升序。虽然年代不好确定，但可能是从明代流传下来的珠算说明书之一。清初肯定成书。

类似的著作还有一些，不再列举。这些著作的内容都很相近，特别是校订本《指明算法》和《铜陵算法》几乎完全一样，仅是后者比前者多了一部分。由此，我们推想：从明初开始形成了一个以夏源泽《指明算法》为代表的系统，其余各书都是在它的基础上改编的。到明末《算法统宗》问世后，两个系统并行。《指明算法》(或《铜陵算法》)系统，没有程大位和《算法统宗》名气大，但在普及珠算的作用上不能低估，很可能超过《算法统宗》。这样说，并不是认为两个系统没有关系，它们之间是相辅相成的。

本时期内李长茂有一部《算法说详》9卷，作于顺治十六年(1659年)，北京故宫博物院图书馆藏有康熙元年(1662年)刊本。该书与上述珠算书不同，乃是一部内容较广的数学著作。

黄宗羲(1610～1695)，字梨洲，浙江余姚人。其父曾因弹劾魏忠贤(1568～1627)阉党受害，宗羲为父报仇。这件事一直斗争到清兵南下之后。但是他又参加抗清活动，直到复明无望才回到故里。康熙帝曾诏聘他预修明史等工作，皆固辞不就。

黄宗羲长期从事学术研究，就是在极不稳定的情况下也还利用暇时进行工作。他研究的范围极广，著述等身，天文历算也在其中。主要的和与历算有关的著作有《明儒学案》62卷、《易象数

论》6卷、《春秋日食历》1卷、《律吕新义》2卷、《授时历注》1卷、《大统历推法》1卷、《授时历假如》1卷、《西历假如》1卷、《回历假如》1卷、《南雷文约》40卷、《明夷待访录》2卷，“尚有《运气算法》、《勾股图说》、《开方命算》、《测圆要义》共若干卷”①，还有《授时历故》4卷。

黄宗羲的数学著作都已不传，唯《授时历故》有刊本，其中包括他对元代《授时历》的研究，与数学关系密切。本书第六卷第三编在讨论王恂的数学研究时，已多次引用《授时历故》，以说明《授时历》中的数学内容。但是有些内容是原《授时历》所有，还是他自己的发挥？前引者都与邢云路《古今律历考》相参照认为是来自《授时历》比较可靠的部分，有些不太明确。

《授时历故》中有9个解方程的问题，其中“如问半弧背一度下黄赤道矢度若干”题，在解之末有“即《授时历》所谓立天元一也”。与邢云路所引全同。但怎样“立天元一”则都未涉及，也就是说没有“如积”过程，而直接给出开方式的系数及常数项：“实”、“方”、“廉”、“隅”，接着就是解(开方)。详细解法已见前卷，下面对“三差”问题略加论述。

在《授时历》中有“定差”、“平差”和“立差”的“三差”之说，用以计算日月五星之运动。设$a$，$b$，$c$分别代表“定差”、“平差”、“立差”，《授时历故》中又给出“初末限”$n$，则月行迟疾差$p$如下：

$$p=[a-(b+cn)n]n.$$

展开为

$$p=an-bn^2-cn^3.$$

这就是在前卷见过的表达式。

《授时历故》以“日法万分，限法八百二十”与“转终”(近

① 李元度．名儒·黄梨洲先生事略．见：国朝先正事略．卷二十七

点月）日数 27 日 55 刻 46 分进行计算，即

$$27.554\,6\text{ 日}\div 820=336.031\,7\text{ 日}\approx 336\text{ 日}。$$

这个 336 叫做“周限”，是和“转终”相对应的一个周期。把“转终”分为 7 段，同时再分为 4 象，共得 28 段。每段对应 12 限，每 1 象为 84 限，共为 1 周，该 336 日。每日积 12 限。在此基础上求“迟疾”的各种“差”。以 1 象为例进行计算。

在“各段实测晷差若干为各段迟疾度差分”，如第 1 段“迟疾差”1 度 28 分 712[①]，“乃是测晷至十二限比初限所差之数”，其余类推。于是得下列数表（表 2.1.1）。

**表 2.1.1**

| 段 | 积　限 | 积　差 |
|---|---|---|
| 第 1 段 | 12 | 1 度 28 分 712 |
| 第 2 段 | 24 | 2 度 45 分 9 616 |
| 第 3 段 | 36 | 3 度 48 分 3 792 |
| 第 4 段 | 48 | 4 度 32 分 5 952 |
| 第 5 段 | 60 | 4 度 95 分 24 |
| 第 6 段 | 72 | 5 度 32 分 944 |
| 第 7 段 | 84 | 5 度 42 分 3 376 |

在此情况下可继续求积差的一差、二差和三差，得一个三次差分表，可是他先降阶，然后求各次差分。前已讲述，此处不赘。

黄宗羲的工作水平未超过《授时历》，但是他的贡献是保留了前人的思想方法，并弥补某些不足（见前卷所述各点）。

黄宗羲之子黄百家（1643～1709）也是数学家，他的工作主要是对新传进之西方某些数学内容进行研究。他有《勾股矩测解

① 这里的“度”是中国传统的分法。全周为 $365\frac{1}{4}$，度，每度为 100 分。

原》2卷流传到现在，可在《四库全书》中找到。该书是对熊三拔《表度说》一书所作之注释。另有《筹算》一书，未刊[①]。根据书名可推知应是对纳披尔算筹的研究和介绍。

## 第二节 薛凤祚的工作

薛凤祚(1599～1680)，字仪甫，号寄斋，山东益都金岭镇人。过去人们对薛凤祚的籍贯有说是淄川的，已有人辨证[②]。查他的五世孙薛懋修于乾隆三十四年(1769年)所著书说："祖居青州府益都县之金岭镇。"[③]因益都县在青州，所以说他为青州人也可以。薛凤祚在署名时常用"北海"或"海岱"，这是由于隋唐曾有时改青州郡为北海郡，故有人称青州为北海；"海岱"是指今山东半岛根部，它东北临海，西南为泰山(别称"岱")而得名，古代实指青州和徐州一带。

薛凤祚早年"天资过人，赋性聪敏"，出身于当地一个有名的家族，在家中受启蒙教育。后来到直隶保定府的定兴县学习"心学"，因感到空洞无味而弃去。又和持保守观点的魏文魁学习传统历法。当时正是徐光启领导改历的时候，因此他有机会与罗雅谷、汤若望接触，学习西方的天文学和数学。入清以后，于顺治九年(1652年，壬辰)到南京(白下)，与在那里传教的穆尼阁相遇，并向他"求三角法，又求对数及对数四线表"[④]。因此，他"与穆尼阁、汤道未、罗雅谷游，得历学之要"[⑤]。实际上，他学贯中西，知识渊博。

---

① 李俨. 中国数学大纲(下册). 北京：科学出版社. 1958. 459

② 袁兆桐. 清初山东科学家薛凤祚. 中国科技史料，1984，5(2)：88～92

③ 薛懋修. 两河清汇易览・序. 1769

④ 薛凤祚. 中法四线・引. 1662

⑤ 同②。

薛凤祚晚年，受河道总督王光裕之聘，成为幕僚，参与治黄和运河工作。他“躬历数千里，考黄淮漕运，利害曲折，施有成效”[①]。

薛凤祚虽在年轻时考中秀才，补为贡生[②]，但是他一生潜心学术研究，特别是在天文学、数学、物理与机械、水利学等科学技术方面取得成果。他在当时就是有名学者，与另一吴江的学者王锡阐齐名，梅文鼎评价说：“其能知西法复自成家者，独北海薛仪甫、嘉禾王寅旭二家为盛。”[③] 王寅旭即王锡阐。后来，阮元(1764～1849)论曰：“国初算学名家，南王北薛并称。”[④]

薛凤祚一生勤于著述，所著计有《车书图考》、《两河清汇》8卷(又称《两河清汇易览》)、《天学会通》1卷、《天步真原》3卷、《历学会通》3集、《乾象类占》、《比例对数表》等等，还纂修过《山东省志》。

《历学会通》3集，有康熙年刊本。从署名来看，有一部分是薛凤祚和穆尼阁合作的，特别是数学部分更是如此。现将其目录列下：

《历学会通》

子目：

正集，前有“康熙改元壬寅北海薛凤祚记”，共14种，15卷。

总目：

参议条议1卷。

(法数部)正弦1卷，南海穆尼阁编，北海薛凤祚注。

① 韩梦周. 两河清汇易览·序. 1779

② 袁兆桐. 清初山东科学家薛凤祚. 中国科技史料，1984，5(2)：88～92

③ 梅文鼎. 绩学堂文钞卷五·锡山友人历算书跋

④ 阮元. 畴人传卷三十六. 薛凤祚

中法四线1卷(一作《比例四线新义》)，海岱薛凤祚纂，前有康熙改元壬寅十二月薛凤祚所作之引。

太阳太阴诸行法原1卷。

五星经线部1卷。

交食法原1卷。

中历1卷。

求岁实1卷。

五星立成1卷。

交食表2卷。

经星部1卷。

日食诸法异同图1卷。

辨异同1卷。

比例对数表1卷。

续集，共12种，18卷：

三角算法1卷，穆尼阁著，薛凤祚纂。

律吕1卷。

法律吕部1卷。

西法医药部1卷。

中法占验3卷，朱熹辑，薛凤祚订。

古法占验1卷，薛凤祚编辑。

选择2卷。

十干化曜1卷。金陵翘、萧起编集，薛凤祚订阅。

人命3卷，即天步真原，穆尼阁口译，薛凤祚编辑。

中西火法1卷，穆尼阁撰，薛凤祚纂，有康熙三年薛凤祚叙。

中外师学2卷，韩霖编，薛凤祚选。

重学1卷，金四表撰，王征选，薛凤祚编，有康熙三年薛凤祚叙。

外集，共16种，27卷：

旧中法选要6卷，有康熙三年薛凤祚叙。

时宪蒙求1卷。

今表1卷。

西域回回历1卷，薛凤祚校。

线表1卷。

今西法选择2卷。

天步真原4卷。

日月食原理1卷，大西穆尼阁撰，海岱薛凤祚辑。

历法部1卷，撰、辑同上。

正弦部1卷。

天步真原蒙求表1卷。

天步真原表3卷。

纬星性情、经星性情、恒星性情3卷。

世界部1卷。

另有一种《薛氏遗书》24册，与《历学会通》大同小异。但有说该书有康熙三年刊本，当时薛凤祚还健在，很可能是因为其中有些部分有薛凤祚于康熙三年写的叙而导致的误解。

又，上述目录中有二种《天步真原》，一为论述交食的著作，一为讲人命的，即续集的第九种。钱熙祚于道光己亥(1839年)指出："伏读《四库(全书)》著录《天步真原》一卷，亦穆尼阁撰，专论交食，与此本绝不相同，此大部下有人命部三字。似穆氏原书分部甚多，尚不止二种。"[①] 确实如此。值得注意的是：人命部《天步真原》用到了大量的数学知识，特别是三角法用得最多。

薛凤祚在数学方面的工作主要是首次把对数介绍到中国，以及对三角学的研究。

---

① 钱熙祚.（人命部)天步真原跋

上面提到的《比例对数表》一书专讲对数问题。薛凤祚序(1653年)称：

"……穆(尼阁)先生出，而改为对数。今有对数表，以省乘除，而况开方立方三四方等法，皆比原法工力，十省六七，且无舛错之患，此实为穆先生改历立法第一功。予执笔以受，时以重译，……岁在寿星，历春既夏而秋，方盛暑则烈阳薰灼，挥汗浃背，劳诚劳矣，功于何有!"

可见当时翻译对数表之艰苦，但把对数的"改历立法"作为穆尼阁的"第一功"似可讨论。如果这是指在中国则可，否则不可。

穆尼阁在书中有一段对对数的大概说明：

"愚今授以新法，变乘除为加减，……解此别有专书，今特略明其理，如下二表，二同余算，不论从一、二、三、四起，或从五、七、九、十一起，同余之内，中三相连度数，可取第四。"

这里所说的"二表"，已由李俨①改写成如下的表(表 2.1.2).

表 2.1.2

| 比例算 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1 024 | 2 048 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 同余算($a$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 同余算($b$) | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |

这表的意义是：如"同余算($a$)"中的 6，7，8，9 有关系 $9=(7+8)-6$，"同余算($b$)"中的 5，7，9，11 有关系 $11=(7+9)-5$。

根据以加减代乘除的作法，"比例算"是四率成比例的，如$1:2=4:8$，$8:16=256:512$之关系等。按上表"比例算"内$4:32=128:x$，于是有 $x=\dfrac{32\times128}{4}$，这本来是乘除计算，但是由"同

① 李俨. 中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955. 84

余算”就变成了加减法，因为对 32 为 6，对 128 为 8，对 4 为 3，则对 $x$ 为(6+8)−3=11，查表知 11 有 1 024，即 $x=1\ 024$。

《比例对数表》包括 10 000 以内的对数表，取 6 位小数。书中有这样一段话："原书当用十万，其表久成，尔西来不戒，失之于途，今止一万，……原数一万之外，取比例法。"从这话知，穆尼阁所用之对数表著作不是利用北堂所藏之书，而是他自己从欧洲带来的，比最早传进者可能晚若干年，但却是最先译成中文的。如果求 10 000 以上的对数则用比例法解决。李俨举了下面的例子[①]：

$$\lg 160\ 232=?$$

分解为小于 10 000 的有效字，然后用比例法进行计算

$$\lg 1\ 602=3.204\ 662,$$
$$\lg 160\ 200=5.204\ 662,$$
$$\lg 1\ 603=3.204\ 933,$$
$$\lg 1\ 603-\lg 1\ 602=0.000\ 271。$$

由比例法，得

$$\frac{32}{100}\times 0.000\ 271=0.000\ 086。$$

于是

$$\lg 160\ 232\approx 5.204\ 662+0.000\ 086$$
$$=5.204\ 748,$$

即为所求之结果。

《历学会通》所包括之《比例四线新表》1 卷，是一 6 位小数的对数表。当时还有一部不署撰译者姓名的《四线对数表》1 册，小数 10 位，套印。“四线”指正弦、余弦、切线和余切线，就是说这两书都是三角对数表。现举一部分如下(表 2.1.3)。

---

① 李俨．中算史论丛(第三集)．北京：科学出版社，1955．84

表 2.1.3①

| 度分秒 | 正　弦(sin) | 余　弦(cos) | 切　线(tan) | 余切线(cot) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°0′0″ | 0 | 10.0000000000 | 0 | | 0″ | 60″ |
| 10″ | 5.6855748665 | 9.9999999995 | 5.6855748670 | 14.3144251330 | 50″ | |
| 20″ | 5.9866048617 | 9.9999999980 | 5.9866048637 | 14.0133951363 | 40″ | |
| 30″ | 6.1626961198 | 9.9999999954 | 6.1626961244 | 13.8373038756 | 30″ | |
| 40″ | 6.2876348554 | 9.9999999918 | 6.2876348636 | 13.7123651364 | 20″ | |
| 50″ | 6.3845448673 | 9.9999999872 | 6.3845448801 | 13.6154551199 | 10″ | |
| 1′ 0″ | 6.4637261109 | 9.9999999786 | 6.4637261293 | 13.5362738707 | 0″ | 59″ |
| 10″ | 6.5306728985 | 9.9999999750 | 6.5306729235 | 13.4693270765 | 50″ | |
| 20″ | 6.5886648429 | 9.9999999673 | 6.5886648756 | 13.4113351244 | 40″ | |
| 30″ | 6.6398173623 | 9.9999999568 | 6.6398174037 | 13.3601825963 | 30″ | |
| 40″ | 6.6855748502 | 9.9999999489 | 6.6855749013 | 13.3144250987 | 20″ | |
| 50″ | 6.7269675316 | 9.9999999382 | 6.7269675934 | 13.2730324066 | 10″ | |
| 2′ 0″ | 6.7647560882 | 9.9999999265 | 6.7947561617 | 13.2352438383 | 0″ | 58″ |
| 10″ | 6.7995181904 | 9.9999999137 | 6.7995182767 | 13.2004817233 | 50″ | |
| 20″ | 6.8317028692 | 9.9999998899 | 6.8317029693 | 13.1682970307 | 40″ | |
| 30″ | 6.8616660875 | 9.9999998851 | 6.8616662024 | 13.1383337976 | 30″ | |
| 40″ | 6.8896948059 | 9.9999998693 | 6.8896949366 | 13.1103050634 | 20″ | |
| 50″ | 6.9163207389 | 9.9999998525 | 6.9160238864 | 13.0838761136 | 10″ | |
| 3′ 0″ | 6.9408473166 | 9.9999998346 | 6.9408474820 | 13.0591525180 | 0″ | 57″ |
| | (cos) | (sin) | (cot) | (tan) | | |

现在讨论穆尼阁和薛凤祚的三角学工作。此工作主要是《三角算法》，在(人命部)《天步真原》中也使用了三角学。

① 李俨. 中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955. 239

《三角算法》是一部专门讲三角的专著，与明末《大测》、《测量全义》不同，因为那些书不是专门讲三角。"三角"之名可能在中国首次使用。本书又是包括平面三角和球面三角两部分，内容全面。它的前半部分为平面三角，且都用对数给出计算公式。

设 $A$，$B$，$C$ 为三角形的三个角，其对应边为 $a$，$b$，$c$，则有

$$\lg b=\lg a+\lg\sin B-\lg\sin A,$$

实由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$而来。

$$\lg\tan\frac{A-B}{2}=\lg\frac{a-b}{2}+\lg\tan\frac{180^\circ-C}{2}-\lg\frac{a+b}{2},$$

$$\lg\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{[\lg(s-b)+\lg(s-c)]-[\lg s+\lg(s-a)]\},$$

其中 $2s=a+b+c$。

书的后半部分为球面三角，把球面三角叫做"圈线三角法"，书中将《测量全义》中的一些公式归并，同时以对数入算。重要的是给出了如下一些新公式

$$1.\ \begin{cases}\tan\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\times\cot\dfrac{C}{2},\\[2ex]\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}\times\cot\dfrac{C}{2};\end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases}\tan\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\times\tan\dfrac{c}{2},\\[2ex]\tan\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}\times\tan\dfrac{c}{2};\end{cases}$$

$$3.\quad\begin{cases}\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(B-E)\cdot\sin(C-E)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \cos\dfrac{b}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(A-E)\cdot\sin(C-E)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \cos\dfrac{c}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(A-E)\cdot\sin(B-E)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{cases}$$

其中 $2E=A+B+C-\pi$；

$$4.\quad\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}},\\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin c}},\\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}},\end{cases}$$

其中 $2s=a+b+c$。

公式 1 称“达朗贝列比例式”(Delambre's analogies)，公式 2 称“纳披尔比例式”(Napier's analogies)①。

上述这些公式都是中文书中第一次出现。

原书对这些公式只是给出了结果，而没有证明，且图形也草率。

(人命部)《天步真原》主要讲天象和人的吉凶祸福关系，即所谓“人命”。实是把西方的星占迷信介绍到中国来。

由于把人的命运和天象联系在一起，因而就需要计算日月五星等在天球上的位置，球面三角便在这里派上用场了。该书卷中有“算十二宫”、“表算十二宫”、“三角算十二宫”等项目，都用到球面三角。所谓“十二宫”即黄道十二宫，每宫 30°。假定在赤

① 李俨. 中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955. 220～221

道坐标系统中，如图 2.1.1，甲、乙、丙为球面直角形。为表达方便起见，设$\angle C$为直角，$\angle ABC$为黄赤交角（书上为 23°31′[①]）。在直角三角形 $ABC$ 内，除$\angle C$外已知二个另外的条件可求出第三个边或角。求法是“四率比例”，现举例如下。

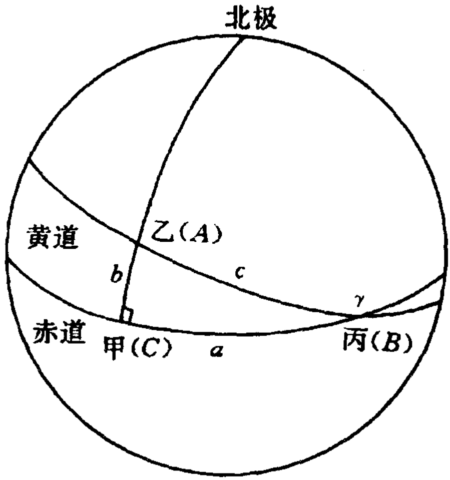



图 2.1.1

已知 $B$，$c$，求 $b$，有“一率通弦，二率二十三度三十一分正线，三率五十四分十三分正线，求四率”，四率即“甲乙边即黄赤二道距度”，亦即求 $b$。用下面公式

$$1:\sin b=\sin B\cdot\sin c,$$

得 $\sin b$ 的值，再求其反函数，得 $b=18°53'$。

又如已知 $b$，$c$，求 $a$，用

$$\cos b:1=\sec a:\sec c\text{，或 }1:\cos b=\sec c:\sec a$$

等等，都是《测量全义》中已有的公式，此处为说明在“人命”上

① 此处的度为西方的 60 分法。

的应用而略加讨论。

## 第三节　王锡阐的工作

王锡阐(1628～1682)，字寅旭，号晓庵，自号天同一生以及其他字号，苏州府吴江县震泽镇(今江苏省吴江市震泽镇)人。年17，明朝灭亡，他愤而投河自杀，幸而遇救，但又绝食7日，在父母强迫之下才开始重新进食。从此，他“遂弃制举业，专力于古学，经史子集一一有根底。排异端，斥良知，直以濂洛洙泗为己任，所交游尽笃学高蹈之士，尤嗜天文历数言”[①]。隐居不仕，过着清贫的生活。

他一直怀念故国——明朝，所以便与明代遗民，如顾炎武(1613～1682)、吕留良(1629～1683)、张履祥(1611～1674)、潘柽章(1626～1663)等来往密切，表现出对清朝政权的不满。不过，他主要致力于天文历法的研究，而在研究的目的上也反映着反清的情绪。

明朝所用历法为根据《授时历》改编的《大统历》，崇祯时虽有改革历法之举，但未制订出历法，入清则颁行汤若望所上之《时宪历》。王锡阐认为：“且译书之初，本言取西历之材质，入大统之型范，不谓尽堕成宪而专用西法如今日者也！”[②]当时他的目的不是废除《大统历》，而是“取西历之材质”，将其融入《大统历》。他承认西洋历法比较精确，同时又说：“夫新法之戾于旧法者，其不善如此；其稍善者，又悉本于旧法如彼。”[③]几乎是全盘否定。实际上他是采取中西兼之的思想研究历法，完成了他有名的

---

① 王济．王晓庵先生墓志．见：道光震泽镇志卷五·墓域

② 王锡阐．晓庵新法自序

③ 阮元．畴人传卷

著作——《晓庵新法》6 卷。

康熙二十一年(1682 年)秋九月，王锡阐在贫病交加中走完他的人生之路，享年 55 岁。无子，有二女。有一妹妹王锡蕙，也爱好天文历法。

王锡阐早年研究天文非常刻苦，常于夜间登上屋顶，仰观星空，进行观测。到晚年留下大量研究手稿，成本的有《五星行度解》等，由潘耒(1644～1708,潘柽章之子)、徐善、姚汝鼐等人进行搜集和整理，编辑成《晓庵遗书》和《晓庵先生集》两种，前者主要是关于天文历法的研究,后者为王锡阐平日所写之诗文,分为《晓庵先生诗集》和《晓庵先生文集》。

王锡阐在天文历法方面的工作早已引起人们的注意，20 世纪 60 年代有席泽宗的研究①，后来有美国席文(N. Sivin)的全面介绍②，还有其他许多研究和介绍。其天文著作写法简略，又用大量数据和新术语，再加上没有图形，非常难懂。近年日本的薮内清、矢野道雄、川原秀成和宫岛一彦等断续用了 3 年左右的时间才研讨了《晓庵新法》6 卷中的前 3 卷③。

在《晓庵遗书》中没有包括王锡阐的数学研究，但实际上他对数学有很深的造诣，并写有著作《圜解》。

王锡阐写作《圜解》一书可能起因于天文研究。《晓庵新法》的第一卷专讲数学，包括四个小项目，即“勾股”、“割圆”、“变率”和“通率”。在“割圆”中置全圆四分之一为“象限”，“割圆周之一曰正弧”，“正弧与象限之较曰较弧”，“弧之对边与两端属

① 席泽宗. 试论王锡阐的天文工作. 科学史集刊，1963(6)：53～65

② Sivin N. Wang Hsi-Shan. In：Dictionary of Scientific Biography 14. New York：American, Council of Learnet Societies, 1976. 159～168；又载 Science in Ancient China, Variorum，1995(5)，与上文相比有较大修改。

③ 宫岛一彦. 王锡阐《晓庵新法》の太阳系モテル. 见：中国古代科学史论续编. 京都：京都大学人文科学研究所，1991. 243～266

于弧之两端者曰全弦，全弦之末为其半弧之正弦"，"正弦与半径为勾弦求股，为较弧之正弦，亦正弧之较弦"等。其中所谓"较弦"就是余弦。因《晓庵新法》是讲天文学的，尽管用到许多数学知识，但不能展开讨论。对与天文学研究关系极为密切的圆进行专门研究是很必要的。

在整理王锡阐遗稿的人中，如徐善、潘耒就见过《圜解》一稿，并请梅文鼎给予补订。这件事可能做成，有梅文鼎如下的一段话可以为证：

"《圜解》十二章，吴江王寅旭先生锡阐作也。寅旭深于历算之学，此其一斑耳。余得此本于槜李徐善敬可。敬可与寅旭友，尝有所问，作此告之。仍有割圜图如扇面者一纸，行笥偶遗，惟存此本及所作历说六篇。……至若《测量全义》可谓精矣，而先后数相加减代乘除之法，亦但举其用而不详其理，熟复于寅旭此书，可以得其门户。惜其书尚有未竟，而其中章次，颇为抄录者所乱。因稍为更定，并订补其论之所遗及字句之伪凡十余处，以质之敬可(徐善)。"①

从此之后就不知去向了。

20世纪50年代，在李俨的藏书中发现一本无撰者的写本《圜解》，其上有朱批校，并与《矩度》、《测量》两种合订在一起，但手笔不同。经严敦杰证实，《圜解》就是王锡阐的著作，后来有梅荣照的一篇有关研究论文发表②。

此写本很可能就是梅文鼎批校本，有两点证据：其一是梅文鼎说"《圜解》十二章"，写本也正好有12个目录，但有二个"第八"，这反映出"章次，颇为抄录者所乱"的实据；其二是梅

---

① 梅文鼎.《圜解》序. 见：绩学堂文抄卷二

② 梅荣照. 王锡阐的数学著作——《圜解》. 见：明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 97～113

文鼎订补的“所遗及字句之伪凡十余处”，查写本上改正的、填补的字句等共 19 处，与“十余处”之说符合。

写本的目录是：平圆第一、平行线第二、弧弦矢第三、折线第四、勾股第五、三边形第六、四边形第七、圆内方形第八、弧弦矢互易第八、两弦相因第九、两弧损益第十、多弧较弦第十一。

根据这个目录可知，《圆解》是以圆为主题和与圆相关的直线问题。其中最重要的内容是用几何方法证明两角和、差的平面三角正弦与余弦公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta。$$

为了证明上的需要，书中首先讨论了某些相关的预备知识和概念。前面已提到一些，下面再讲几项。

较弦：余弦，又称“全弦承数”。

折：“凡两线相交必成四折，两线为一折，两折共一线”，如图 2.1.2，左右与前后两线相交于“心”，构成四折。

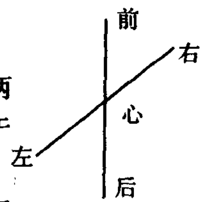



图 2.1.2

先数、后数：是指在一个公式的一端由两项构成，这里特指上面两式的右端就是先数和后数，有下列两种情形：

正弦的情形 $\begin{cases}\text{先数：“小弧较弦因大弧正弦”，}\\ \text{后数：“大弧较弦因小弧正弦”；}\end{cases}$

较弦的情形 $\begin{cases}\text{先数：“大弧正弦因小弧正弦”，}\\ \text{后数：“大弧较弦因小弧较弦”。}\end{cases}$

设 $\alpha$，$\beta$ 分别为大弧和小弧，且 $\alpha>\beta$，则有

正弦的先数为 $\cos\beta\cdot\sin\alpha$，后数为 $\cos\alpha\cdot\sin\beta$；

较弦的先数为 $\sin\alpha\cdot\sin\beta$，后数为 $\cos\alpha\cdot\cos\beta$。

总弧：“两弧相从曰总弧”，“相从”即相加。

多弧：“两弧相消曰多弧”，“相消”即相减，所谓“多弧”就

是大弧比小弧的多余部分，亦即大小弧之差。

矩折："矩折者，其折中矩"，"中矩"即直角。

尖折："小于矩折为尖折"，即小于直角的"折"。

斜折："大于矩折为斜折"，即大于直角的"折"。

在上述的概念中，王锡阐不用"角"这一名词，其实"折"正符合角的定义。

书中给出了一批命题，相当于定理，它们是：

"凡圆中全径分全圆为两半周。"

"圆中平行两线得皆不为圆径，不得皆为圆径。"（按："得皆不为圆径"似为衍文，应删）在对此命题的解释中说："盖平行两线，其两端中间广狭俱等，倘微有不等，即不得谓之平行矣。"这有对平行线下定义的性质。

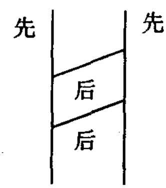



图 2.1.3

"此线与彼线平行，彼线又与他线平行，则他线与此线必平行。"

"先有平行两线，次复有平行两线，在先两线之间俱与先两线相遇，则次两线俱等。"（如图 2.1.3）

"有大小两圆，其弧、径、弦、矢比例皆同。"（如图 2.1.4）（按：除径外，其他三者必须符合相等圆心角这个条件）。

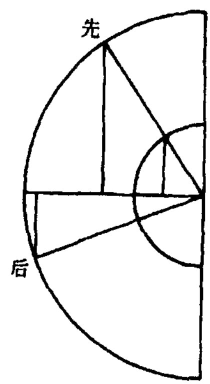



图 2.1.4

在这些命题的叙述中有的不够严格，已经指出一二条，其实第一条中的"两半周"应为"相等两半周"，否则"全径"之假设是没有意义的。

对上面二角和差的正弦、较弦公式进行证明的关键是，先求出右端的先数和后数之和或差所成之线段，然后证实正是左端所对应的线段。为此先证明先数和后数所成之线段。这又分三种情

形：(1)大小两弧俱不及象限，即$\alpha$，$\beta<\frac{\pi}{2}$；(2)两弧俱过象限，即$\alpha$，$\beta>\frac{\pi}{2}$；(3)两弧一过象限，一不及象限，即$\alpha>\frac{\pi}{2}$，$\beta<\frac{\pi}{2}$。这是该书的“两弦相因第九”的内容，但只对(1)进行了比较详细的论述，王锡阐在论述的末了说：“右两形中各两弧俱不及象限，其俱过象限及一过一不及者，可以意推。”所谓“右两形”即有两幅大体相近的图形，将它们稍加改变成为图2.1.5[①]。

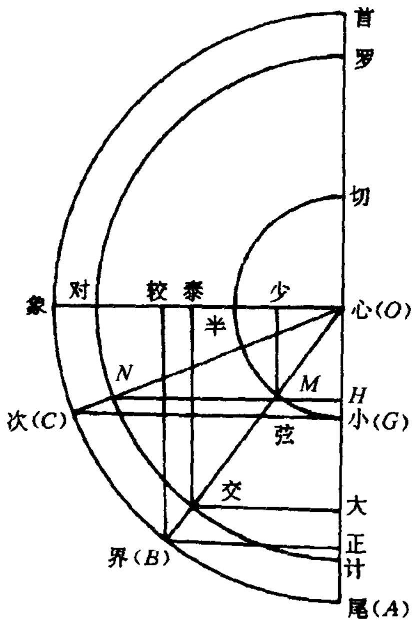



图 2.1.5

① 本图的符号采自：梅荣照. 王锡阐的数学著作——《圆解》. 南京：江苏教育出版社，1990. 97～113(下同)

图 2.1.5 是一个单位圆的一半，有两个小的同心圆。弧$\overset{\frown}{AC}=\alpha$，$\overset{\frown}{AB}=\beta$，均小于$\frac{\pi}{2}$，很容易证得

先数：$\sin\alpha\cdot\cos\beta=NH=CG\cdot NO$，

后数：$\cos\alpha\cdot\sin\beta=MH=MO\cdot BF$。

对于(2)(3)也有这样的结果。

实际上，上面的先数和后数只适用于正弦，还有较弦的先数和后数的“相因”式，书中有“置大小两弧，以小弧正弦因大弧正弦，曰先数；以小弧较弦因大弧较弦曰后数”。

如果把$\alpha$和$\beta$的大小关系分类，王锡阐有如下 6 种情况：

$$\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2};\ \alpha,\ \beta>\frac{\pi}{2};\ \alpha>\frac{\pi}{2},\ \beta<\frac{\pi}{2};$$

$$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2};\ \alpha+\beta<\frac{\pi}{2};\ \alpha-\beta>\frac{\pi}{2}。$$

用于$\sin(\alpha\pm\beta)$和$\cos(\alpha\pm\beta)$，共有 24 种，书中讨论了以下几种：

1. “两弧俱不及象限者，以后数减先数为多弧正弦，以后数加先数为总弧正弦。”

2. “其小弧不及象限，而大弧过象限者反是。”

3. “大小两弧俱过象限者，以先数反减后数得多弧正弦。”

4. “大小两弧俱不及象限，而总弧过象限者，亦以后数加先数得总弧正弦。”

5. “大小两弧俱不及象限者，以后数加先数得多弧较弦。”

6. “小弧不及象限，大弧过象限者，以后数消先数得多弧较弦。”

7. “大小两弧俱过象限者，亦以后数加先数得多弧较弦。”

8. “小弧不及象限，而多弧大于象限者，以先数消后数得多弧较弦。”

第 1 项和第 2 项各包括 2 种情形，共为 10 种。它们的现代表

示分别是：

1. $\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\sin\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta(\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}),\\ \sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta(\alpha,\beta<\frac{\pi}{2});\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta(\alpha>\frac{\pi}{2},\beta<\frac{\pi}{2}),\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta(\alpha>\frac{\pi}{2},\beta<\frac{\pi}{2});\end{cases}$

3. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta(\alpha,\beta>\frac{\pi}{2})$；

4. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta(\alpha,\beta<\frac{\pi}{2},\alpha+\beta>\frac{\pi}{2})$；

5. $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta(\alpha,\beta<\frac{\pi}{2})$；

6. $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta(\alpha>\frac{\pi}{2},\beta<\frac{\pi}{2})$；

7. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta(\alpha,\beta>\frac{\pi}{2})$；

8. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta(\beta<\frac{\pi}{2},\alpha-\beta>\frac{\pi}{2})$。

根据这些表达式即可知所缺者是哪些。书中为什么未全部给出？很可能是，王锡阐认为处理的方法都差不多，没有必要全部讨论吧?！实际上用现在的观点来看，当$\alpha$，$\beta$为任意角时，它们的正弦与余弦公式都成立，但是当时还没有一般角的概念，因此王锡阐的工作是有意义的。下面举两个例子，看王锡阐是怎样证明的。

**例 1**　（第 2 项的第二式）即当$\alpha>\frac{\pi}{2}$，$\beta<\frac{\pi}{2}$时，证明$\sin(\alpha+$

$\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ 成立。

如图 2.1.6，弧$\overset{\frown}{AC}=\alpha>\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{AB}=\beta<\frac{\pi}{2}$，而 $\alpha-\beta=\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，对应的角为$\angle BOC$。设 $BU\perp OC$，则$\triangle OBU$ 为直角形，所以 $\sin(\alpha-\beta)=BU$（如图）。可以通过相似三角形证得 $\sin\alpha\cdot\cos\beta=BP$，$\cos\alpha\cdot\sin\beta=PU$，所以 $BU=BP+PU$，这就得到了(2)的第二式。

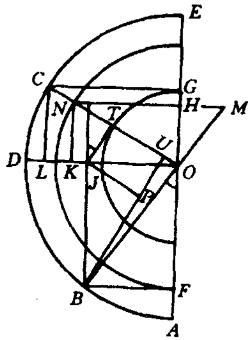



图 2.1.6

**例 2**　（第 7 项）即当 $\alpha$，$\beta>\frac{\pi}{2}$时，证明 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ 成立。

在图 2.1.7 中，$\overset{\frown}{AC}=\alpha$，$\overset{\frown}{AB}=\beta$，且均大于$\frac{\pi}{2}$，而 $\alpha-\beta=\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，对应的角为$\angle BOC$。设 $PU\perp OC$，$JP/\!/OC$，那么$\triangle OUB$ 为直角三角形，所以 $\cos(\alpha-\beta)=OU$。再通过相似三角形证得$\cos\alpha\cdot\cos\beta=OT$，$\sin\alpha\cdot\sin\beta=TU$，这就得到了(7)。

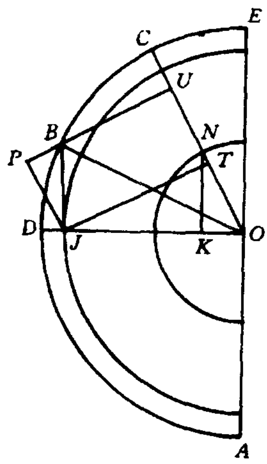



图 2.1.7

其余的不再讨论。

在论证过程中，王锡阐有统一思路，特别是利用半径等于单位长度这一特点和平行线、垂线所带来的便利，可以说相当巧妙。

在书的“多弧较弦第十一”之后有“切分界分”一段，无重要意义。在此之后还有一段无标题、讲勾股相似形的文字，笔体与前面的全不相同，显然是他人后加的，但

其上有圈点，可见是在梅文鼎批校之前。

王锡阐所用名词术语有不少是他自己提出的，前已述及，有的前人已用过，如“先数”、“后数”见于《测量全义》。他的贡献主要有两点：其一是用演绎和逻辑推理方法论证三角公式，论证相当严密，而且在论证之前给出所用的概念和所需之定理，结构合理。其二是他对三角公式的证明，开中国此项研究之先河，梅文鼎的工作在王锡阐之后，又各有不同。

王锡阐还有《筹算》1卷，未刊[①]。根据书名可推测，应是对明末传入的纳披尔算筹及其用法的研究。

## 第四节　李子金与《算法通义》

李子金是一位布衣数学家，他的数学著作，特别是《算法通义》在清初数学发展史中有一定影响，在这一时期兴起的中西数学会通中起了积极作用。这一节根据新发现的史料简单介绍他的传略与主要著作《算法通义》。

### 一、传略与著作

#### 1. 传略

李子金(1622～1701)[②]，名之铉，字子金，号隐山，柘城骡车李村(今河南省柘城县皇集乡后罗李村)人，清初著名数学家。子金出生于一个比较富有的庄户人家。李姓是柘城的一大家族，子金的曾祖父李相、祖父李自峥、父亲李熊兆(字叶梦)，都上过儒学，是当地的绅士。子金兄弟二人，哥哥李之钵，字子传，柘城县儒学增广生员，兄弟二人文采过人，当时在柘城被誉为“李氏

① 朱记荣．国朝未刊遗书志略

② 皇清文学子金李公墓志铭．见：河南省柘城县皇集乡后罗李村李传福、段秀兰夫妇藏碑

双璧”[①]。

李子金自幼聪明好学，天资过人，“清才隽思，童年即驾其曹”[②]。明朝末年，大概是1642年，李自成起义军攻破黄河以南各郡县，科举考试的督学使者不敢渡过黄河举行考试，而把应试的书生召集到黄河以北的辉县，应试者数千人，李子金也参加了考试，并以优异成绩被督学使者拔置柘城诸生籍中。李子金性格开朗，平易近人，上层及一般人都很尊敬他。正如墓志铭中所说：“子金乐易人，平居油油，不见喜愠之色，与人处略无崖岸，虽屠沽佣保，咸知敬而恭之。然而持身甚严，不可以非礼动，可谓介然有守者。”子金天性高简，通达脱俗，不拘小节，不计名利。他虽清羸，尚隐居，然负壮志，大部分时间从事于道学、天文学、数学、律吕以及声韵学科的研究，尤其精通数学，善勾股嘉量之术。有一次，子金与朋友在酒店聚会，酒兴之余，有一位朋友指着临近的一座楼房说，你能算出此楼高低吗？他立刻回答说可以。随即用一小尺在地上纵横丈量，后又卧地用眼斜视楼顶，跃起便说出楼高尺寸，他又令人用井绳量之，果然不错，“不爽铢黍”[③]，众人皆惊叹不已。另外还传说他渡河后再斜视水面即能推知水深浅。估计李子金是利用相似三角形原理测量高深广远的。不过测量水深并不是一件很容易的事情。

李子金对律吕、声韵之学亦有所研究，能精工制作乐器并熟练地演奏，在当时豫东享有很高声望。例如，睢州贤达王祖恢在其所著《浮香阁轶闻》一书中有一首诗就是推崇李子金在律吕方面成就的。诗云[④]：

---

① 李氏家谱. 见：柘城县皇集乡后罗李村离休干部李继典藏本

② 李子金传. 见：许酉峰编. 柘城县志；鹿邑县志. 河南省图书馆藏本. 乾隆十八年

③ 见《柘城县志》《鹿邑县志》。

④ 睢州志. 河南省图书馆藏本. 光绪十八年

十五人声独会心　　下姑洗管少知音
当年河右飘零日　　未遇睢阳李子金

由于李子金苦心钻研，学识渊博，成了乡里及上层社会的贤哲，与睢州文人田兰芳(1628～1701)、柘城文人李之振齐名。子金中年常游京师，接触到当时京师有名学者，互相切磋学问，学习西洋传入的数学历法知识。从他为清初数学家杜知耕的著作《数学钥》写的序中可以看出，他对京师学者、上层名流对待数学的态度以及学习情况了解得非常详细，由此推测，他在京师的时间可能很长，他的几何知识和西洋历法知识大概也是在这一时期学到手并且还进行了深入研究。

李子金终生不为官，致力于学术研究。1661 年完成《律吕心法》3 卷，以后便沉醉于数学和天文学研究。1671 年，李子金已 48 岁，可能是一生学术生涯的转折点，这年冬天，客居彭泽公署时曾赋诗一首，诗云①：

终夜何曾寐　　忡忡志不宁
气血衰至此　　何必梦周公
安仁鬓已白　　买臣数未通
留得穷愁在　　立言胜立功

此诗一方面流露李子金这时的悲愤心情达到了“终夜何曾寐，忡忡志不宁”的极度痛苦境地，另一方面也道出作者不愿终日叹息，消磨时光，也不去追求功名利禄，而是弃旧图新，加快研究步伐，深钻苦研，著书立说的矢志豪情。经过十几年的辛勤耕耘，终于结出累累硕果。从 1676 年到 1690 年的 14 年中，平均不到五年就完成一部著作，况且是在 54 岁到 68 岁的高龄，自己又出资请南方能工巧匠刻版印刷。由此可见他坚定不移的决心、坚韧不拔的毅力以及为完成这些著作在身心和物资方面所付出的代价。子金

---

① 隐山鄙事自序．见：隐山鄙事．北京图书馆藏本

治学严谨，诲人不倦，深得好评，就是在他晚年，仍然思路敏捷。1698年夏，柘城著名人士陈朴林专程找李子金请教，子金引经据典，旁征博引，循循善诱讲解，使请教者受益匪浅。

李子金学风踏实，他非常鄙视哗众取宠、不学无术之辈。当谈到京师学习《几何原本》一书的情况时曾尖锐指出："京师诸君子，即素所号为通人者，无不望之反走，否则掩卷不谈，或谈之亦茫然而不得其解。"[①]然而他对刻苦好学的人非常赞赏，例如谈到杜知耕学习《几何原本》深入娴熟情况时，则说："端甫则寓目辄通，莫不涣然冰释而无所凝滞。一时皆翕然称异，而不知其为端甫等闲之事也。"[②]

2. 主要著作

李子金的著作有12种，共27卷，30余万言，总名为《隐山鄙事》，这12种著作是：属于数学方面的有《算法通义》（1676年），5卷，刊本；《几何易简集》（1679年），4卷，刊本；《天弧象限表》（1683年），2卷，刊本；《解环谱》，1卷，抄本。属于天文学方面的有《历范》（1688年），3卷，抄本。属于哲学方面的有《狂夫之言》（1690年），3卷，刊本。属于律吕、音韵方面的有《律吕心法》（1661年），3卷，刊本；《传声谱》，1卷，抄本。属于其他方面的有《书学慎余》，2卷，刊本；《周易后天图书》，1卷，抄本；《闲居五操》，1卷，抄本；《蛩鸣录》，1卷，刊本。对于《算法通义》，下面有专论，这里先简单介绍一下李子金的其他数学天文学著作。

**《几何易简集》**　本书是《几何原本》和崇祯辛未年（1631年）艾儒略口述，海虞瞿式谷笔受，陆安郑洪猷作序的《几何要法》二书的删注本。李子金考虑到《几何要法》一书虽然包括内

①② 李子金. 杜端甫数学钥序. 见：杜知耕. 数学钥. 1916年开封荣兴斋石印本. 河南省图书馆藏本. 康熙二十一年(1681年)

容不少，但理论阐述较少，只谈要法而不谈原本，只知其法，不明其理。于是作者“取要法删而注之，于要法之外复取原本中之不可不载者，亦删而注之，或旁通其说，或发明其理，无非使读要法者知几何之有原本，而不至有学而不思之弊则已矣”①。具体在删节时，究竟哪些删？哪些留？哪些可以深究？哪些可以简言？作者所掌握的尺寸是“于其至浅而以为不足道者，尽去之；于其深而以为不能至者，从而旁通之，发明之”②。用这样的标准删注所要产生的效果是“使原本之微机妙义灿若指掌，而要法所载者无一不可解者”③。作者之所以用“几何易简集”来作为本书的书名也正是出于这种动机。本书在某种意义上说可以算作几何学方面具有概括和总结性的辅导书。虽然书中无多少惊人之举，但对清初几何学的传播和发展起到了一定的推动作用。

本书收入《四库全书》卷一〇七子部天文算法类存目中。

**《天弧象限表》** 《天弧象限表》是对“西洋割圆八线表而变通其数，省约其文”④后写成。李子金考虑到同角三角函数间的关系后知道“既有正弦便有余弦，既有正余之两弦，便有切割之两线，而两矢又即在两弦之中，是一线而得八线，即从而俱得”⑤。于是八线之中仅表正弦一线即可以了。但又考虑到正余相求必用勾股开方之法。另外，前45度之余弦即后45度之正弦，后45度之余弦即前45度之正弦。因此，“与其用四十五度之一弦多一开方，又不若四十五度之两弦者省一开方”⑥。于是“于八线中止取正弦余弦之两线，其它皆从推算而得，为法甚捷而为用甚便”⑦。这样可不必将八线数尽列出表。经过改造后“旧表九十余页，为文十有余万而不见其多；今表不过七页半，为文不过数千而不见其少”⑧。

另外，该书中还给出一个三线表的设计方案，也就是给出前

①②③ 李子金．几何易简集．北京图书馆藏本

④⑤⑥⑦⑧ 李子金．天弧象限表．柘城县文化馆李继光抄本

45 度正弦、正割和余切三个表，这样可以利用同角三角函数公式求其余三个函数。这种方案的好处是，篇幅节省，计算中只用乘而不用除，计算量大为减少。书中不仅有表，还有两个求正弦和余弦的近似公式和一个利用勾股测量计算角度的近似公式，方法新颖独特，使用起来非常方便[①]。

**《解环谱》**　主要研究“九环索”的设计与解法，并附有计算，是一种融智能、游戏于一体的通俗读物[②]。

**《历范》**　本书“历学源流”中，李子金回顾了元王恂、郭守敬到郑世子朱载堉这段时间内历法的修改过程。李子金评价《授时历》时说：“始为近密，故大统遵而用之。合元明以至于今，已四百余年，而合朔交食尚自不爽，此其何故也？盖创始者难工，增修者易善，兼以郭太史之天性神解数学精密，故其法较诸历之行为最久。其间虽不无小差而不至于大缪也。”[③]但终因“所立年久，难以施用”。所以清初开始沿用西历，这样中历之法湮没不传，成为绝学。李子金考虑到“元史所载虽有历经历议而无所引喻，颇费推术。予用是详察西历之理而通以中历之法，精思数年始得其概，不得不笔之于策，以备后人之采择”[④]。至于本书的写作动机，李子金说：“弃其所短，而用其所长，斯善之善者也。然不明中历之法，无以用西法之长。昔徐玄扈先生有会通之议云，镕彼方之材质，入大统之典范。”[⑤]这样，“据其数以布算而无牵合附会之嫌，知过必改，见善斯迁，不青于蓝而寒于水哉！”[⑥]期望所著之书“后人循习晓畅而求进，当复更进于前人”[⑦]。于是李子金把书名定为“历范”。

---

① 高宏林．李子金《天弧象限表》研究．见：数学史研究文集(第四集)．内蒙古大学出版社和台湾九章出版社，1993

② 该书被李子金后代一直保存到 1973 年，后被借走，至今仍未追回。这段文字是由李继光提供，他曾亲自看过此书。

③④⑤⑥⑦ 李子金．历范．柘城县文化馆李继典抄本

李子金的数学研究工作在清初中西数学会通时期占有很重要地位，受到学者们好评。四库全书馆员们在《四库全书总目》卷一〇七，子部，天文算法类存目中所加的按语指出："子金，柘城人，隐山其号也。与梅文鼎、游艺、揭暄、王寅旭辈互以算术相高。"另外，当代著名数学史家钱宝琮(1882～1974)也曾给予高度评价。他说："清初人崇尚西法历算，撰著甚富。通历学者有黄宗羲、薛凤祚、王锡阐、揭暄等；通算学者有方中通、杜知耕、李子金、年希尧等。"[①] 这句话是在梅文鼎年谱一文中说的，所以这里所说的数学家也包括梅文鼎在内。

## 二、《算法通义》

### 1. 版本流传

《算法通义》最初刊本是1676年印刷的。就目前所了解到的情况，只有第三和第五两卷仍藏在李子金十代孙、河南省柘城县皇集乡罗李村李传家家中，柘城县文化馆藏有1980年5月李继光的抄本。中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有李俨先生的全五卷抄本。其它版本或抄本尚未发现。

### 2. 《算法通义》的主要内容

全书共分5卷，开头是作者的自序。

第一卷分三部分是乘除论、勾股测望论和勾股容方圆论。

第二卷是弧矢论，其中给出一个径背求弦新法，有很高的使用价值。

第三卷是分法论。这里叙述差分法、二色方程法、三色方程法、四色方程法、三色方程正负法、盈朒法、粟米法。

第四卷介绍《九章算术》中方田章、少广章、商功章、均输章中某些较复杂的问题并阐述理论根据。

第五卷介绍方圆相减以余弦求原径法、径背求弦新法说、诸

① 钱宝琮．梅勿庵先生年谱．见：钱宝琮科学史论文选集．科学出版社，1983

法相较、径背求弦法可代八线表、径弦求背法可代象限仪、各率考实、以三差之术求日行盈缩月行迟疾法、求日行盈缩差、创立四差求日行盈缩差法、求月行迟疾差、创立四差求月行迟疾差法、创立三差通用法、创立四差通用法等。第五卷是本书的核心部分。

本书大体上以《九章算术》的体例又加以作者自己的见解写成。其写作宗旨是考虑到九章所载内容虽然比较详细，并且“学者按法布算无所不合”①，但本书只讲方法，大部分“不言其义”②，所以学习数学的人仅会计算而不知算法的来历，“算学之士有终身由之而不知其道者”③。唐顺之著“六论”主要讲算法原理，但该书“其文约，其指远”④，一般人仍学不通。为此，李子金就“本其义而发明之，或敷演为图，或推广其说，无非示学者以易知易能而已”⑤。李子金又得出结论：“盖天下之物莫不有一定之数，而数之所在，莫不有一定之理，明其理，虽法有万变皆可即此以通之矣。”⑥这样，作者就本着阐明《九章算术》其道之义，而通之以万物变化，以数描述规律之理，把本书命名为《算法通义》。

3. 主要成就

《算法通义》的主要成就在于给出两种三角函数造表方法。这里介绍一下造表法的基本公式、它们精度的比较与改进。

(1)两个计算正余弦函数的经验公式

这两个公式记录在《算法通义》卷二、卷五的“径背求弦新法”和“径背求弦新法说”两节中。这些公式是在半径为10尺的圆中讨论弧(背)所对角的正弦和余弦函数的。若所给的弧半径不是10尺，则要换算成10尺为半径的弧计算。计算公式的原文是：

“视所有现径及弧背各若干。置现背以原径二十尺乘之，以现径除之，即得原径所应有之正背若干。用减半周，余为余背。两背各自乘为各背幂，即各背一乘方也。并之，减去径幂，余为两

①②③④⑤⑥ 李子金. 算法通义. 中国科学院自然科学史研究所抄本

背幂大于两弦幂之共积。另置各背幂再以各背乘之，为二乘方。置二乘方再以各背幂乘之，为三乘方。以各背一乘方、二乘方加三乘方之半为各率，并之，为总率。置共积以各率乘，以总率除，则得各背幂大于各弦幂之积，以减各背幂，余为各弦幂之积。平方开之，得各弧之通弦。折半，即象限表中半背之各正弦、余弦也。”

设所给角为$A$(以度为单位)，直径$d$为20尺，那么，$2A$所对弧长$l=\frac{2A\times 3.141}{180^\circ}\times 10$，余弧长$l'=\frac{(180^\circ-2A)\times 3.141}{180^\circ}\times 10$。这样，李子金计算角$A$正余弦函数公式分别为

$$\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{l'^2-[(l^2+l'^2)-d^2]\frac{l'^2+l'^3+\frac{1}{2}l'^4}{(l^2+l^3+\frac{1}{2}l^4)+(l'^2+l'^3+\frac{1}{2}l'^4)}\div\frac{d}{2}},\quad ①$$

$$\cos A=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-[(l^2+l'^2)-d^2]\frac{l^2+l^3+\frac{1}{2}l^4}{(l^2+l^3+\frac{1}{2}l^4)+(l'^2+l'^3+\frac{1}{2}l'^4)}\div\frac{d}{2}}。\quad ②$$

(2)两个计算正弦函数的“三差”和“四差”公式

李子金创立的两个计算正弦函数“三差”和“四差”公式分别记载在《算法通义》卷五的“创立三差通用法”和“创立四差通用法”两节中，这两个公式是他对元王恂、郭守敬《授时历》中计算日行盈缩、月行迟疾三差法公式进行深入研究以后所创立的较精确的综合公式。公式中所用到的一些历法数据如下：

太阳日率＝0.985 646 5，即91.31日强太阳行90限。

太阴(月球)日率＝13.065 0，即6.888 65日月球行90限。

半周180限，一象90限。

太阳盈缩极差为2度40分(在天实度)。

太阴迟疾极差为5度42分(在天实度)。

“三差通用法”原文是：

"置太阳太阴入历日及分秒，各以日率乘之，视在象限(九十)已下者，为初限；已上者反减半周(一百八十)，余为末限。置立差三十八以入历限数乘之，加平差三千六百，再以限数乘之，用减定差一百七十七万，余再以限数乘之，得数若干。各以盈缩迟疾差之度分乘之，满亿为度；不满亿为分秒，即所求盈缩迟疾差。"

"四差通用法"原文是：

"其用法：置立差三十八秒以入历限数乘之，加曲差一十八分，再以入历限数乘之，用减定差一百七十四万五千六百，余再以限数乘之，得数若干。各以盈缩迟疾极差度分乘之，即得所求，余仿前例。"

这两种方法都是计算太阳和太阴盈缩迟疾差的。至于如何求已知弧的正弦函数值，作者也交待得十分清楚："欲知弧弦之数，置所得盈缩差以极差二度四十分除之，即得。满亿为一百分，千万为十分，百万为一分，十万为十秒，一万为一秒。"这样，只要得出中间结果，再乘以极差就是正弦函数值。若用 $m$ 表示角的度数，那么这两个计算正弦函数的"三差"和"四差"公式分别为：

"三差通用法"公式

$$\sin m=(1\ 770\ 000m-3\ 600m^2-38m^3)\div 10^8。\qquad ③$$

这里括号中三个系数的绝对值依次(从左到右)称定差、平差和立差。

"四差通用法"公式

$$\sin m=(1\ 745\ 600m-2\ 350m^2-18m^3-0.38m^4)\div 10^8。\qquad ④$$

这里括号中 $m$ 的一、二、三、四次项系数分别称定差、平差、立差和四差。

(3)公式计算精度的比较

李子金的三角函数造表公式经过了一个逐步改进的过程，改进的中心问题是如何提高其精确度。他在《算法通义》卷五"诸法相较"一节中列出利用公式①③④以及《授时历》公式计算结

果与象限表中数据比较表，“较其疏密”，亦即比较其计算精度。在介绍比较表之前先谈一下《授时历》中盈缩迟疾三差法求正弦公式。

**日行盈缩三差法**　盈初缩末限为 88.909 225 日，则

$$\sin m=(5\ 133\ 200m-24\ 600m^2-31m^3)\div 2.4\div 10^8。\quad ⑤$$

这里 $m$ 为入历限数：用象限表中度数求入历限数用 $\frac{88.9}{90}=$ 0.987 88乘；以入历限数求象限表中度数用 $\frac{90}{88.9}=1.012\ 3$乘。公式⑤中数字 5 133 200，−24 600，−31 分别为定差、平差和立差。

缩初盈末限为93.712 025日，则

$$\sin m=(4\ 870\ 600m-22\ 100m^2-27m^3)\div 2.4\div 10^8。\quad ⑥$$

这里 $m$ 为入历限数：用象限表中度数求入历限数用 $\frac{93.712\ 025}{90}=$ 1.041 244 7 乘；以入历限数求象限表中度数用 $\frac{90}{93.712\ 025}=$ 0.960 389 乘。

**月行迟疾三差法**　中限 168(月行 336 限，一日行 12.20 限)，一象限为 84 限，转中 13.777 3 日(一月平均为 27.554 6 日)，转象 6.888 65 月，则正弦公式为

$$\sin m=(11\ 100\ 000m-18\ 100m^2-325m^3)\div 5.42\div 10^8。\quad ⑦$$

这里 $m$ 为入历限数：把象限表中数换成日，再以 12.2 乘。

李子金比较表中的数据是在以半径为 100 分的圆中求正弦线的。为了便于和现代数据相对照，我们改半径 100 分为单位长，比较情况见表 2.1.4。

从表中可以看出，用《授时历》中公式计算，所得结果相对误差很大，三差法公式的最大误差为 2.59%，且在 1% 以上者就有六个，因而误差较大一些。四差法的最大误差为 1.5%，1% 以上者只有四个，相对来说误差比较小一些；径背求弦法公式最大

**表 2.1.4**

| | 象限表 | | 授时历 | | 三差法 | | 四差法 | | 径背求弦法 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 函数值 | 误差/% | 函数值 | 误差/% | 函数值 | 误差/% | 函数值 | 误差/% | 函数值 | 误差/% |
| 1° | 0.174 5 | 0 | 0.021 0 | +20 | 0.017 65 | +1.14 | 0.017 43 | −0.114 | 0.017 45 | 0 |
| 10° | 0.173 65 | 0 | 0.201 1 强 | +15 | 0.175 0① | +0.777② | 0.172 0 | −0.95 | 0.173 4 | −0.143 |
| 20° | 0.342 02 | 0 | 0.381 5 强 | +11.5 | 0.336 6 弱 | −1.58 | 0.337 6 强 | −1.27 | 0.341 82 | −0.050 4 |
| 30° | 0.500 0 | 0 | 0.540 4 强 | +8.09 | 0.488 35 | −2.33 | 0.494 6 弱 | −1.08 | 0.500 02 | +0.048 |
| 40° | 0.642 79 | 0 | 0.677 15 | +5.34 | 0.626 1 弱 | −2.59 | 0.639 39 | +0.528 | 0.643 05 | +0.040 6 |
| 50° | 0.766 04 | 0 | 0.790 8 | +3.23 | 0.747 5 | −0.229 | 0.767 8③ | +0.229④ | 0.765 805 | −0.030 6 |
| 60° | 0.866 03 | 0 | 0.880 75 | +1.65 | 0.850 32 | −1.81 | 0.874 63 | +0.993 | 0.865 9 | −0.015 |
| 70° | 0.939 69 | 0 | 0.946 1 强 | +0.69 | 0.932 26 | −0.79 | 0.953 79 | +1.5 | 0.939 76 | +0.007 44 |
| 80° | 0.984 81 | 0 | 0.986 3 强 | +0.158 | 0.991 0 | +0.628 | 0.998 27 | +1.36 | 0.984 85 | +0.004 06 |
| 90° | 1.000 0 | 0 | 1.000 15 | +0.015 | 1.024 3 | +2.4 | 1.000 15 | +0.015 | 1.000 00 | 0 |

①②10″的正弦值，用三差法计算的结果应为0.01730，相对误差为0.374%，表中数据有误。

③④这一部分数据手稿中残缺，该数据是笔者根据“四差通用法”公式计算出来的。

误差只有 0.143%，因此精度较高。

(4)公式的改进过程

这里着重谈一下公式③和④的改进情况。李子金的改进方法分日行盈缩和月行迟疾两种情况，最后用通用法将二者统一起来。

**日行盈缩三差法**　取岁周为 365.242 4 日，一象限为 91.31 日。太阳本轮分为四象，半径为 100 分，一象限弧长为 157.08 分。半径、一象限弧长各乘以极差 2.4 得 240 分和 376.992 分。旧历以 $10^8$ 为一度，因而，240 分和 376.992 分分别当为 $2.4\times10^8$ 和 $3.769\,92\times10^8$。李子金取

$$定差=\frac{3.769\,92\times10^8}{91.31}=4\,128\,700,$$

$$平差=\frac{1}{2}\times\frac{1}{91.31}\left(4\,128\,700-\frac{2.4\times10^8}{91.31}\right)=8\,200,$$

$$立差=\frac{1}{91.31}\left[\frac{1}{91.31}\left(4\,128\,700-\frac{2.4\times10^8}{91.31}\right)-8\,200\right]=90.1。$$

因小数点后位数太多，不便于布算，故用反求之法以齐之。由于

$$\frac{2.4\times10^8}{91.31}=2\,628\,400,$$

$$\frac{1}{91.31}\left(4\,128\,700-\frac{2.4\times10^8}{91.31}\right)=16\,427.55,$$

因此，李子金的反求之法为

令立差为 90(90.1 弃去十分位数)，

$90\times91.31=8\,217.9$，

$16\,427.55-8\,217.9=8\,209.65$，弃去个位及以后之数，取 8 200为平差。

$$(8\,200+8\,217.9)\times91.31+2\,628\,400=4\,127\,500$$

有奇，与原定差 4 128 700 相差不太远，复增 4 130 000 为定差。这样，用公式

$$\sin m = (4\ 130\ 000m - 8\ 200m^2 - 90m^3) \div 2.4 \div 10^8$$

所推之数，相对误差少至$\frac{4}{100}$。李子金又设定差为41 292 000，平差为10 000，立差为90。用公式

$$\sin m = (41\ 292\ 000m - 10\ 000m^2 - 90m^3) \div 2.4 \times 10^8$$

计算，精确度显著提高，相对误差控制在$\frac{2}{100}$以内。

**日行盈缩四差法**

$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{91.31}\left(4\ 128\ 700 - \frac{2.4\times10^8}{91.31}\right)\right] = 5\ 475.85$，取其大约数5 500为平差。

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{91.31}\left[\frac{1}{91.31}\left(4\ 128\ 700 - \frac{2.4\times10^8}{91.31}\right) - 5\ 500\right] = 39.89$，取其约略数40为曲差。

$\frac{1}{91.31}\left\{\frac{1}{91.31}\left[\frac{1}{91.31}\left(4\ 128\ 700 - \frac{2.4\times10^8}{91.31}\right) - 5\ 500\right] - 40\right\} = 0.872\ 58$，取其约略数0.87为立差。反求之，以齐其数。令立差为0.80，得曲差46，平差5 560。又取定差为41 300 000。这样，用公式

$$\sin m = (41\ 300\ 000m - 5\ 560m^2 - 46m^3 - 0.80m^4) \div 2.4 \div 10^8$$

计算，其精确度显著提高。

月行迟疾三差、四差法的改进过程与此相仿，限于篇幅，这里不再赘述。

**侧立三差通用法**　取$\frac{1.570\ 8\times10^8}{90} = 1\ 745\ 333$为定差，

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(1.570\ 8\times10^8 - 10^8)\right]\right\} = 3\ 523.455$为平差，

$\frac{1}{90}\times3\ 523.455 = 39.149\ 5$为立差。

反求之，以齐其数。令立差为39，计算得平差3 536.91或3 537，定差1 745 340，利用此三差所推之数，误差少至$\frac{4.5}{100}$，不够

精确。李子金又进行改进，创立新术，如公式③所述。计算精度提高，误差控制在$\frac{2}{100}$以内。

**创立四差通用法**

$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(1.5708\times10^8-10^8)\right]\right\}=2347$① 为平差，

$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{90}(7046.91-2347)\right]=17.04$ 为曲差，

$\frac{1}{90}(52.22-17.40)=0.3869$ 为立差。

这里　$7046.91=\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(1.5708\times10^8-10^8)\right]$，

$52.22=\frac{1}{90}(7046.91-2347)$。

又取1 745 333为定差，反求之，以齐其数。令立差为 0.38，即得四差通用公式④。

(5)分析与评价

公式①②③④属于经验型公式。公式①②是李子金根据自己的多年潜心研究总结出来的，目前尚未找到它们的理论根据。李子金本人也承认这两个公式不是通过逻辑推理导出的。他在《算法通义》卷五“径背求弦新法说”中直言不讳地承认：“予径背求弦之法，固前古所未有。然不过迁就其数，以求密合耳。若妄谓数出天然，确不可易，予又何敢自欺以欺人乎。”至于公式③④，我们认为是用函数逐次逼近法求出的。若用$a$，$b$，$c$，$d$分别表示定差、平差、曲差、立差，则他是用多项式函数

$$f(m)=am+bm^2+cm^3+dm^4$$

① 按式子计算应为2 348.971，以下计算有误，此处按原文数字照写。

来逐次逼近正弦函数 $\sin m$[①] 的。第一次所取的 $a$，$b$，$c$，$d$ 值，除定差 $a$ 外，大都是非常粗略的。然后用反求之法对各差数据逐次进行调整。其调整原则是先在象限表中取 1°，10°，20°，…，90°的正弦值，再分别计算这 10 个角度入历限数的 $f(m)$ 值，然后使相应函数值相对误差最小。

为了比较起见，我们用小型计算器作出正弦函数的四次插值多项式(节点为 0°,1°,2°,…,6°)

$$\sin m=(1\ 745\ 350m-33.3m^2-75m^3-1.66m^4)\div10^8。$$

该公式精确度非常高，与④相比，二者相差甚远。这主要是④的误差比较大，且 $m$ 为入历限数，非直接所求之角的缘故。

造表法公式风格独特，形式新颖。李子金的造表公式是对西洋传入方法的改进。最早传入我国，由邓玉函编译的三角学著作《大测》2 卷(1631 年)中就有用“三要法”和“二简法”以及“六宗率”计算三角函数值的方法。1700 年由法国传教士杜德美带来的计算三角函数值的幂级数公式，精确度更高。我国学者对此二者都有所研究，并取得许多辉煌成果。李子金的方法介于两者之间，开辟了一条新路子，其公式简洁明快，形式新颖，风格独特。

---

① 日、月、五星的运行轨道都是椭圆，它们的运行速度时刻在变化。现代天文学中把天体沿椭圆轨道运动的实行度与沿圆形轨道平均行度之差称为中心差，其计算公式为

$$V-M=2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin^2M+\cdots$$

其中 $V$ 为真近点角，$M$ 为平近点角，e 为椭圆的偏心率。古代希腊和印度计算中心差采用近似公式

$$V-M=2e\sin M.$$

中国古代的盈缩迟疾差就是中心差。李子金也认识到这个近似公式，其正弦函数计算公式正是在这种观点指导下建立起来的。

## 第五节　方中通的工作

方中通(1634～1698)，字位伯(或位白)，号陪翁，桐城(今安徽桐城县)人。其父为明末清初著名学者方以智(1611～1671)，中通有兄弟三人，长为方中德，三为方中履，中通行二。他 11 岁时，明朝灭亡，当时父亲已隐广东的五岭，方中通随行，清兵进入广东时曾搜寻方以智。据方中通自己说："通五岁就傅，九岁入都，旋遭丧乱，困顿流离，变名姓为他氏子，十四岁而后归桐。"[①] 后来陪伴他父亲到去世，10 多年后又由朋友介绍到广东恩平去教书，在那里居住 10 多年。他说："地当海国，邑号恩州，佟子[②] 不辞万里以分符，方生亦竟十年而寄迹。"又说："余初至恩(州)尚壮，今足病艰。……上齿全落，须鬓皓状。"[③]这时，方中通已 60 多岁，牙齿脱落，鬓发翻白，又有足疾，十分困难。

方中通一直致力于学术，特别是数学研究。他自己说："余与伯氏季氏析吾君子之学。伯氏论史，季氏博物，余惟象数、物理、音韵、六书之学。"[④]伯氏季氏即长兄、三弟，兄弟三人的学术研究都是受到父亲的影响，但方向不同。

方中通早年即对象数发生兴趣，后来从穆尼阁学习则致力数学，他说："通少遭难失学，偶以流寓西堂，泰西穆先生(尼阁)，教以笔算，粗知一二。后得《周髀》、《几何》、《同文》诸书，心甚好之。老父合山衍易时，通得侍左右，始知易备万物之数，而河洛中五为阴阳之大符，人安可不学易乎？欲学易，又安可不学

①③　严敦杰．方中通《数度衍》评述．安徽史学，1960(创刊号)：53～57

②　"佟子"即佟俨若。

④　方中通．陪古卷三

数乎？”[①] 他与穆尼阁接触，可能是顺治九年(1652 年)在南京。他说：“少嗜象数。初讯授时于汤子，既与薛子游泰西穆先生所，时刊其《天步真原》成，语通，喜而交焉。”[②]就是说，他和薛凤祚一起去见穆尼阁，学习了笔算等内容，以后又自己找到《周髀算经》、《几何原本》和《同文算指》进行学习和研究。又因为当时他父亲正在研究《易经》，所以又把数学与《易经》联系起来。

可能就从这时起，方中通把主要精力放在数学研究和著述上，到顺治辛丑(1661 年)完成了《数度衍》一书，全书用八卦名分为 8 册，第一册为总目、外序、家序、凡例；卷首之一数原，卷首之二律；第二册系卷首之三为几何约、重学解。以下 6 册为正卷共 23 卷。所谓外序为吴云于康熙癸丑(1673 年)所写之序，家序即“药地老人[③] 示”及方中德所加的一段话。在方中德的话中有一部分讲述其弟研究数学的经过和主要思想，他说：

“弟之研极者，十余年矣。初大人(方以智)庐墓合山，重编时论时衍极数以示惪(方中德)等，弟退即变数十图以进。大人喜甚，因命精数，弟遂发明勾股出于河图，加减乘除出于洛书。既而玩泰西诸书，乃合笔、筹、珠之三法而穷差别于九章已。三弟得尺算一法，即以贻弟，复数昼夜而尽其变，可谓精矣。方弟之著是书，独处一室，废寝食而寒暑不辍，故宜其探赜索隐，钩深致远，莫不具也。”

这就清楚说明了，方中通根据父亲所指出的要“精数”的意见，实际是精于《易经》，因而他“发明勾股出于河图，加减乘除出于洛书”，也就是从《易经》中找到了数学的根据是河图、洛书。然后他试图用这种观点来统率整个数学。《数度衍》的卷首之一

---

① 方中通. 数度衍·凡例. 1661

② 方中通. 陪古卷一

③ “药地老人”即方以智。

“数原”即阐述此问题，包括“勾股原图说”、“加减乘除原图说”、“九章皆勾股说”、“四算说”、“九九图说”、“倚数图说”和“今之五量用数图说”。从这些标题即可看出其用意。方中通还明白指出：“九数出于勾股，勾股出于河图，故河图为数之原。”又说：“不用十而用九，河图变为洛书，加减乘除之数皆从洛生，而九数之用备焉。”甚至认为“泰西之笔算筹算皆出于九九”等。在“九九图说”中给出了九九八十一图，并在此基础上把《算法统宗》中的纵横图引入书中。

纵横图本身是一种数量关系的反映，包括着许多很漂亮的组合性质[①]，在现代数学中属于组合学的范围。在中国历史上，讨论此类问题时基本上都是从洛书开始，因为阶数最低的3阶纵横图，是非常自然的作法。但是说数学来源于河图洛书则不符合实际情况[②]。退一步来说，即使用这种观点解释数学，也绝不可能囊括所有的初等数学。就连方中通本人也只是这样说说而已。

《数度衍》是一部数学百科全书式的著作，书中包括除三角学外的当时所有数学，内容大多取材于《几何原本》、《同文算指》、《比例规解》、《算法统宗》等。其中卷首之三的“几何约”是《几何原本》前6卷的缩编和改编本，在其最末，方中通说：

“西学莫精于象数，象数莫精于几何。余初读三过不解，忽秉烛玩之，竟夜而悟。明日质诸穆师，极蒙许可。凡制器尚象，开物成务，以前民用，以利出入，尽乎此矣。故约而记之于此。”

可见“几何约”是写于在南京与穆尼阁接触时，以自己对《几何原本》内容的理解去征询穆尼阁，得到肯定的回答。

方中通所说的“四算”是指笔算、珠算、筹算（纳披尔筹算）

---

① 李迪．中国数学通史（宋元卷）．南京：江苏教育出版社，1998

② 李迪．彻底批判关于数起源于“河图洛书”的谬论．数学的实践与认识，1975（2）：11～14

和尺算，尺算即比例规，取材于《比例规解》。

《数度衍》中除改编的内容外还有某些比较新鲜的材料，如卷十一“倍加隔位合数法”，是讲对数问题，又分为 6 种情形：(1)抽中一位前与后合式；(2)抽中二位前与后合式；(3)倍抽减一前合后式；(4)减位倍抽前合后式；(5)减位并抽前合后式；(6)异首减位倍抽及并抽式。严敦杰认为，“此实为《数度衍》一书中最宝贵部分。”① 以下对这部分进行介绍。

**抽中一位前与后合式**　如图 2.1.8，书中说：“凡倍加数，不论共有几位，但就中抽取一位之数，自乘。视所抽之位，至首几位，则自乘之数必与此后几位相同也。如第五本位，则前有四位也，其后四位之数，必二百五十六矣。”把图 2.1.8 改变为现代形式，即表 2.1.5。

**表 2.1.5　“抽中一位前与后合式”(现代形式)**

| 前后位 | 前四位 | (中) | 后四位 |
|---|---|---|---|
| 位数 | 1 2 3 4 | 5 | 6 7 8 9 |
| 倍数 | 1 2 4 8 | 16 | 32 64 128 256 |

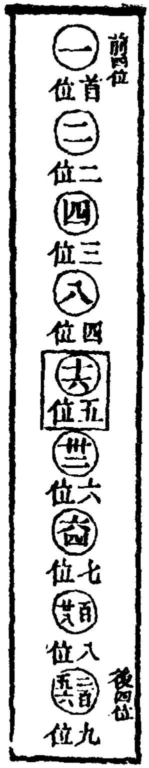



图 2.1.8

书中说：“不论共有几位”，实际上应是奇数位，否则无“中”可“抽”，所举例子 9 位，也是奇数。所谓“倍加”是指 2 的倍数的增加，从 1 开始，2 倍 2 倍地递增，即形成一个数列 1，2，$2^2$，$2^3$，…，$2^{n-1}$，$n$ 为奇数。位次由 1 到 $n$。中间的一位为$\frac{n+1}{2}$位，而$\frac{n+1}{2}-1$为中位之前位，

① 严敦杰．方中通《数度衍》评述．安徽史学，1960(创刊号)：53～57

$2^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)2}=2^{\frac{n+1}{2}-1}$，即为$\frac{n+1}{2}$位下之倍数。这个倍数的自乘等于最末的倍数，亦即$\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2=2^{n-1}$。这个结果相当于

$$\log_2\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^2=n-1。$$

很显然，适用于$n$为任何奇数(包括$n=1$)的情形，表中的位数和倍数可无限制地造出。

**抽中二位前与后合式**　“于多位之中，前抽一位，后抽一位，相乘，则视前抽之位，去首几位；后抽之位，再去几位，其数必与此相乘之数合也。如前抽第二位，其数二；后抽第四位，其数八，相乘得十六。前抽之位，去首一位，则后抽之位再去一位，其数亦必十六也。”现把书中的图形改为现代形式(如表2.1.6)。

**表2.1.6　“抽中二位前与后合式”(现代形式)**

| 前后位 | 前一位 | 前 | (中) | 后 | 后一位 |
|---|---|---|---|---|---|
| 位数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| (倍数) | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

上引文字中没有提到“中一位”，实际上必须有，从表2.1.6中即可看到，前一位和后一位、前位和后位到未指出的“中”都是等距离的。设$n$为奇数，其中一位为$\frac{n+1}{2}$，其前、后位分别为$\frac{n+1}{2}-1$和$\frac{n+1}{2}+1$，而它们对应的“倍数”为$2^{\frac{n+1}{2}-1}$和$2^{\frac{n+1}{2}+1}$，其乘积为$\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)\times\left(2^{\frac{n+1}{2}+1}\right)=2^{[(n+1)-1]}=2^{n+1}$。这相当于

$$\log_2\left[\left(2^{\frac{n+1}{2}-1}\right)\times\left(2^{\frac{n+1}{2}+1}\right)\right]=n+1,$$

即“后抽之位再去一位”。假如$n=5$，则有

$$\log_2 16=4。$$

**倍抽减一前合后式**　“不必算其前后之位。但视所抽第几位，倍其位数，减一得后应合之位，则所抽位数自乘，必与后位数合

也。如抽第三位，倍为六，减一得五，则第三位之四自乘得十六，必与第五位之数合也。”设 $n$ 为位数，成一有限自然数列，对应的倍数数列为 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots$ 按原文所述则抽第 $n$ 位，它对应 $2^{n-1}$，而 $(2n-1)$ 位所对的倍数为 $2^{2n-2}$，则它与“抽位数自乘”相等，即 $(2^{n-1})^2=2^{2n-2}$。相当于有

$$\log_2(2^{n-1})^2=2(n-1)。$$

**减倍位抽前合后式**　“先排倍数于右，次排位数于左。须除首位不算。自次位作一位排之，抽第几位倍之，不必减一，即得应合之位，则所抽位之自乘，必与后位数合也。如抽第二位，倍为四，则第二位之四自乘得十六，必与第四位之数合也。”如图 2.1.9。设倍数数列为

$$2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{n'}, \cdots, 2^{2n'}, \cdots$$

则

$$(2^{n'})^2=2^{2n'},$$

或

$$\log_2(2^{n'})^2=2n'。$$

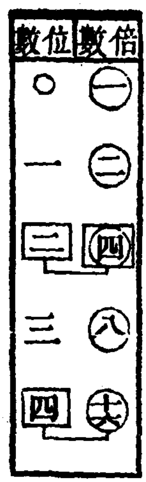



图 2.1.9

**减位并抽前合式**　“抽两位之互乘，则并所抽之两位共为几位，即知相乘之数，必与其位数合也。如抽第一位、第三位，二与八互乘得十六。以一位与三位并为四位，则第四位之数必十六也。以上皆首位起一者。”设有如下两列数：

1，2，3，　4，　5，　6，　7，…

2，4，8，16，32，64，128，…

上列称为“位数”，下列都是二倍二倍递增的“倍数”。

设 $n_1$，$n_2$ 是位数中两个任意的数，它们对应的倍数分别是 $2^{n_1}$ 和 $2^{n_2}$。令 $n_1+n_2=n_3$，$n_3$ 对应的倍数是 $2^{n_1+n_2}$，而 $2^{n_1}\times 2^{n_2}=2^{n_1+n_2}$。位数 $n_1$，$n_2$ 及其和 $n_3$ 与下列的对应关系如右式所示。

$$\begin{array}{ccccc} n_1 & + & n_2 & = & n_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2^{n_1} & \times & 2^{n_2} & = & 2^{n_1+n_2} \end{array}$$

从对应关系来看，$2^{n_1+n_2}$的对数是 $n_3$，即

$$\log_2 2^{n_1+n_2}=n_1+n_2=n_3,$$

其中 $n_1$，$n_2$ 可以相同。

以上五种方法，虽然各有不同，但是都从首位起算，且它们本质上都是以 2 为底 $2^n$ 的对数，即

$$\log_2 2^n=n。$$

最后一种略有变化，不再赘述。

方中通的对数无疑也是来自穆尼阁，他和薛凤祚同时学来，而在方法上并不相同，不过本质上则无区别。

在书的同一章中，还有“倍加”术，首先给出“二因加”和“三因加”两个数列：

二因加：1，2，4，8，16，32，64，128；

三因加：1，3，9，27，81，243。

前者为 $2^n$ 型，后者为 $3^n$ 型，$n$ 从 0 起。然后则从数列反求倍数。设 $n_1$ 和 $n_2$ 是某一数列相邻的两数，且 $n_1<n_2$。如存在自然数 $p$ 使

$$n_2-pn_1=l \quad (0<l<n_2,\text{自然数}),$$

则 $l$ 就是倍数。当然这里所说的数列只限于 $2^n$ 型和 $3^n$ 型，但可以推广为 $m^n$，而 $m$ 为任意自然数。

设 $p_i(i=0,1,2,\cdots,s)$和 $q_j(j=0,1,2,\cdots,r)$分别代表 $2^n$ 型数列和 $3^n$ 型数列的项。方中通给出了一系列定理，且各有名称：

“截三位较”：$p_ip_{i+2}=p_{i+1}^2$，$q_jq_{j+2}=q_{j+1}^2$；

“截四位较”：$p_{i+1}p_{i+2}=p_ip_{i+3}$，$q_{j+1}q_{j+2}=q_jq_{j+3}$；

“一倍加求积法”：$\sum\limits_{i=0}^{s}p_i=2p_s-1$；

“二倍加求积法”：$\sum\limits_{j=0}^{r}q_j=\dfrac{(q_r-1)}{2}+q_r$。

最末又出现一个新的数列，设 $a_1$ 为首项，以下各项是 $a_{i+1}=a_i+\dfrac{a_i}{2}(i=1,\cdots,s)$。由于每项都出现$\dfrac{a_i}{2}$，所以要出现分数。方中通

只好采取舍或入的办法保证一直是自然数。如果我们与13世纪时欧洲比萨的斐波那契《计算之书》那个脍炙人口的兔子数列相比较，那么可以看到当方中通这个新的数列取$a_1=1$时，$\{a_i\}$就近似等于$\{u_n\}$[①]。

书中还有“递加”术，同样有类似结果。

方中通的这种研究，在以前的著作中并不多见。

《数度衍》第12卷“开平方”，讨论各种开方问题，相当全面，也值得研究。

① $\{u_n\}$是兔子数列，即斐波那契数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…

它的后一项几乎是前一项的1.5倍，此倍数逐渐增大直至相当大时，才是前一项的1.618…倍。

# 第二章　“会通中西”的天算家梅文鼎

## 第一节　梅文鼎生平及著作

梅文鼎(1633～1721)，字定九，号勿庵，是清代一位杰出的天文学家和数学家，他在初等数学方面做了集大成的工作，在清初被誉为“历算第一名家”①。

梅文鼎生于安徽宣城的一个知识分子家庭。他自幼聪明好学，在其父士昌和塾师罗王宾的指导下，9岁就已熟读五经，被周围的人称为“神童”。



梅文鼎

梅文鼎20岁左右成婚，妻子姓陈。从27岁开始，他与弟文鼐一起，拜竹冠道士倪观湖为师，学习《大统历算》等天文著作，尤其注重对日月交食的研究。在学习期间，他非常刻苦，而且善于用脑，人们说他“必求其说，至废寝食”。经过3年的研究，他于30岁时著成《历学骈枝》4卷。从中可以看出，他对理论的研究已相当

① 江永.《翼梅》序

深入了，而且写得简明易懂。竹冠道士阅后，称赞他“智过于师。”[①]此后，梅文鼎便致力于天文和数学的研究，艰苦奋斗近60年，从未间断，在中国科学史上写下了光辉的一页。

在梅文鼎时代，西方科学知识已陆续由传教士传入中国。当时知识界中一些思想保守的人排斥西学，另外一些人则只看重西学，鄙视中国的传统科学。但梅文鼎认为，科学研究应不分中西，“技取其长而理惟其是”[②]，这种中西结合、取长补短的态度是他取得卓越成就的重要原因。他很注意搜集资料，对古今中外的天文数学书籍精心研究。每得到一本有价值的书，他往往“爱不释手，穷日夜不舍”。

1664年，32岁的梅文鼎写了一部有关田亩测量的数学书《方田通法》。不久以后，他开始研究方程。正当他雄心勃勃地开展科研的时候，他的妻子不幸病故。这时的梅文鼎，年仅40岁。中年丧妻，对他是一个沉重的打击，但献身科学的精神，使他很快恢复了正常活动。他终生没有再娶，一直埋头于科研工作。《方程论》、《筹算》、《中西算学通》……一本本大作先后发表。尤其是1680年成书的《中西算学通》，对中西数学进行了综合研究，内容涉及初等数学的各个方面，包括筹算、笔算、度算、比例算、几何、三角、方程、勾股测量等。这部书写成后，很快轰动了数学界，有人称赞说：“中华算学，无有过之者。”但梅文鼎并不满足于已有成就，他经过长期研究，又于1684年写成《平三角举要》和《弧三角举要》，这些书对于平面三角和球面三角知识的传播起了很大作用。可惜的是，《中西算学通》早已失传。

在天文学方面，梅文鼎研究了《西域万年法》、《回回法》、

---

① 毛际可．梅先生传．见：《勿庵历算书目》卷前．《丛书集成初编》本．商务印书馆，1939

② 梅文鼎．堑堵测量．卷二

《西域天文书》、《授时历》等大量前人著作。他在研究中不迷信书本和名人，而是善于独立思考。例如，当时西方一些人用表影长短来解释“日远月近”，认为太阳与月亮同高时，其表影较短。梅文鼎认为，日远月近的结论是对的，但他们的证明方法不对，“月能掩日，日远月近，其理明白而易见，不在表影”，于是作《太阴表影辩》一卷，纠正了西人的错误观点。他发现钦天监监正杨光先所作日食图不准确，就写了《日食图法订误》一卷。

1689年，梅文鼎为了进一步研究西学，专程去北京访问比利时传教士南怀仁。遗憾的是，当他来到北京时，南怀仁已去世了。但他此行却结识了大学士李光地，此人后来为他的科研提供了许多方便。他还结识了一批数学界的朋友，包括比利时传教士安多(Antoine Thomas，1644～1709)。当时安多正与白晋、张诚等以满语教康熙帝数学。梅文鼎此行，进一步开了眼界，了解了国内外科学发展情况，对他以后的科研有很大意义。

梅文鼎在北京时，经常住李光地家。他那种废寝忘食的治学精神，使李光地深受感动。后来，李光地在一篇文章中写道：“梅定老客余家，见其无一刻暇，虽无事时掩户一室中如伏气，无非思历算之事。”[①]从1689年到1693年，梅文鼎时时留心科学，经常发现新的课题，5年中著述极多。例如，他发现艺人用竹篾编成的各种灯，都是规则的几何体，于是用几何原理进行研究，独立获得计算各种正多面体的内切球半径和体积的方法以及半正多面体有关性质，写成《几何补编》一书。他认为我国传统的勾股算数和西方的《几何原本》形式上虽然不同，但理论上可以互通，因此著《几何通解》一书，依勾股算数证明了《几何原本》中的许多命题。为了普及笔算方法，梅文鼎又著《笔算》5卷。这是中国最早的自撰笔算书之一，书中明确提出了乘法交换律。另外，《少

① 李光地．榕村语录续集．卷十六

广拾遗》、《勾股举隅》等数学著作，以及《历学疑问》、《答刘文学问天象》等天文学著作，也是这一时期完成的。

1693年，61岁的梅文鼎离开北京，返回南方旧居，继续从事历算研究工作。他用问答体写成《学历说》，于1697年出版。这是一本深入浅出、便于普及的好书，后人称赞它“精而不浮，博而且当”。两年以后，他去福建研究天文，参照西方传来的关于恒星的理论及自己对天体的观察，写成《古历列星距度考》1卷，这本书不仅在理论上，而且在以星位定时的实际问题中，都是有价值的。书成后，梅文鼎从福建北归，第二年写成一部球面三角著作《环中黍尺》。梅文鼎著书，是很注意面向读者的。为了使文字显明易懂，他往往“不辞劳拙，反复再三”，后人称赞他“以平易之语解极难之法，浅近之言达至深之理”①。

实际上，梅文鼎不仅是一个严肃的科学家，还是一位循循善诱的导师。黄宗羲的儿子就曾跟他学习历法，受益匪浅。李光地也经常向他问算。李曾深有感触地说，由于自己“天资极钝”，向潘次耕学筹算没学懂，“今得梅先生和缓善诱，方得明白”。

1702年，李光地以抚臣的身份，随康熙帝来到德州，把文鼎的《历学疑问》3卷呈上。康熙浏览二日后召见李光地，说：“所呈书甚细心，议论亦公平，此人用力深矣。”②康熙帝是一位重视科学的帝王，他感到梅文鼎的书很有价值，于是带回宫中细阅。第二年康熙再度南巡时，发回此书，书中圈点及批语甚多。1705年，康熙第三次南巡时，在船中亲自召见梅文鼎，畅谈历算之学。康熙十分钦佩梅文鼎的学问，认为当代很少人能比得上他。见他两鬓如霜，康熙向李光地叹息道：“惜乎老矣！”康熙设宴招待梅文鼎，并手书“积学参微”四字赠梅，表彰他的学问达到炉火纯青

① 阮元. 畴人传. 商务印书馆，1955. 483

② 李光地. 恭记. 见：《历学疑问》卷前. 1704

的精深程度。

由于受到康熙帝的重视，梅文鼎名声大振。但他并无骄矜之情，仍旧虚心好学。有一次。一位叫毛心易的隐士来拜访他，探讨方、圆相切等问题，梅文鼎感到对自己有启发，便“以师事之”。后来他在编《勿庵历算书目》时，还念念不忘此事，说毛的来访使自己对“方圆相容相变诸率益觉精明”，他和数学家年希尧之间也是经常切磋，互相学习。

由于梅文鼎是宣城人，被时人称为“梅宣城”。秀水张雍敬曾特地到宣城游学，后来写了一本《宣城游学记》。江夏刘湘奎也不远千里，来到宣城，在梅文鼎门下学习数学。数学家江永(1681～1762)曾著《翼梅》一书，阐发梅文鼎的数学理论，称梅为“历算第一名家”。胡宗绪还写过《梅胡问答》，书中记载了他与梅文鼎讨论数学的情况。这些充分说明梅文鼎是该学派的权威。戴震(1723～1777)、汪莱(1768～1813)、凌廷堪等都尊梅氏为师，是安徽数学学派的重要成员。戴震的《测算》以梅氏的《筹算》为蓝本，《勾股割圆记》也根据梅氏著作改编而成。这个学派中代代相传，而梅氏祖孙——梅文鼎和梅珏成无疑是一个中坚力量。在梅文鼎的教育和影响下，梅家四代通数学。除梅珏成外，还有文鼎弟文鼐、子以燕、曾孙钫等。梅氏家族为宣城数学学派的发展作出了重要贡献。

梅文鼎开创的安徽数学学派有两个突出特点：一是会通中西数学，把中国古算和刚刚传入的西方数学相结合；二是把数学明确分为算术与量法(即代数与几何)两类，分别研究。该学派具有承上启下的历史作用。经过该学派的工作，不仅使古算复兴，而且对初等数学作了比较全面的总结，这是承上。而梅文鼎开创的中西数学对照研究的道路及用统一的观点研究数学的思想，一直影响到19世纪，这是启下。

1721年，89岁的梅文鼎因病去世，留下的是他毕生心血的结

鼎——天文及数学著作80余种。先由魏荔彤、杨作枚整理出版《梅氏历算全书》，后经梅珏成整理和精选，取其中25种共62卷，编成《梅氏丛书辑要》(1761年)，含数学著作13种共48卷。

梅文鼎的主要数学著作有：

算术方面：

《笔算》5卷，《筹算》2卷，《度算释例》2卷，《比例数解》4卷。

代数方面：

《少广拾遗》1卷，《方程论》6卷。

几何方面：

《勾股举隅》1卷，《几何通解》1卷，《方圆幂积》1卷，《几何补编》4卷，《勾股阐微》4卷。

三角方面：

《平三角举要》5卷，《弧三角举要》5卷，《堑堵测量》2卷，《环中黍尺》5卷。

## 第二节 梅文鼎的数学思想

### 一、会通中西与“西学中源”说

梅文鼎生当西方初等数学大规模传入中国的时代。明末徐光启首先提出要“会通”中西数学，但当时对西学重在翻译，研究尚少；至于中国传统数学，由于明代数学衰微，学者对传统数学缺乏了解。在这种情况下，自然难以会通中西之学。真正实现“会通”，是从清初数学家梅文鼎开始的。他所以能担此重任，不仅由于他对中西数学都有深入研究，还由于他具有“技取其长而理惟其是”的正确态度。

清初的学术界，面对刚刚流入中国大地、尚不熟悉的西方数学，以及源远流长、但同样不熟悉的中国古代数学，不知如何取

舍。有人尊古而排斥西学，有人则只重西学，鄙视传统数学，于是形成中西之争。梅文鼎自幼留心算学，积多年研究中西数学之经验，深知“会通”的重要性。他说：“天下之不可不通，而又不易通者，算术之学是也。”[①]他分析了两方的片面性，指出：“学其学（指西方数学）者又张皇过甚，无暇深考乎中算之源流，辄以世传浅术，谓古九章尽此，于是薄古法为不足观；而或者株守旧闻，遽斥西人为异学，两家之说遂成隔碍，亦学者之过也。”[②]他认为“法有可采何论东西，理所当明何分新旧”，应该“去中西之见，以平心观理”。[③]这显然是一种实事求是的科学态度。对中西各家的不同学说，他主张“务集众长以观其会通，勿拘名相而取其精粹”。[④]他在这种思想的指导下，毕生致力于天算研究，成书 80 余种，内有数学书 20 余种，实践了自己“以学问之道求其通”[⑤] 的观点。

梅文鼎是怎样理解“通”的呢？他在《中西算学通》序言中说：“以一人一日之心，通乎数千载之前，与数万里之外，是之谓通。”靠什么来通呢？他接着写道：“传曰思之思之，鬼神通之。非鬼神也，精神之极也。”他在这里批判了数学神秘思想，强调了人的思维作用。他还进一步认识到“数学者征之于实”，所以“放之九州四海而准”。他对数学的这些唯物主义的认识，是他取得卓越成就的思想基础。

比梅文鼎稍早的徐光启，曾一针见血地指出明代数学落后的原因：“其一为名理之儒土苴天下之实事，其一为妖妄之术谬言数有神理。”而梅文鼎则比较自觉地抵制了这两种思想，他一方面重视实事，另一方面又注意探索数学规律。他“偶见馆童屈篾为灯，诧其为有法之形”，受到启发而研究正多面体和半正多面体的性

---

①② 梅文鼎. 绩学堂诗文抄. 乾隆三年版

③④ 梅珏成辑. 梅氏丛书辑要. 见：堑堵测量. 同治十三年版. 卷二

⑤ 同①②。

质，这就是他重视实事的一例；他从西方的三角学中，看到与古勾股术的相通之处，也是由于他认识到两者都“征之于实”，来源于测量。他在《勿庵历算书目》中明确指出：“中西两家之法，派别枝分，各有本末，而理实同归。”纵观《梅氏丛书辑要》，多是为了探求这种同归之理。梅文鼎认为只要“得乎其理”，则“天道人事，经纬万端，而无所不通”，因此他要“理求其是，事求适用”①。为达此目的，他的第一步工作是积极吸收和介绍西学，第二步便是使西学与中国传统数学融合。

梅文鼎不仅深入研究了他所能接触到的西方数学译著，如《几何原本》、《同文算指》等，还设法同西方传教士接触，以交流数学。他于1689年与传教士安多的结识，便是一例。梅文鼎吸收西学的态度是积极的，对那些新鲜的数学原理，他“必求其说”，对西学胜过中国的地方，他更是称赞不已，视如珍宝。一旦弄通，便迫不及待地著书阐发，向国人介绍。例如，他在《比例数解》中评价对数时说：“今则假对数以知本数，不用乘除，唯凭加减。数之奇也，前此无知者。……对数之奇，尤在开方，古开方术至三乘方以上，委曲繁重，积晷刻而后成；今用对数，俄顷可得，殆非拟议所及。”②在《度算释例》中，又称赞比例规说：“其测算精密，虽隶首、商高复起，亦无以易。”

梅文鼎的数学著作中，对当时传入中国的西方数学各分支，几乎全有论述，内容遍及笔算、筹算、平面三角、球面三角、平面几何、立体几何、对数等。他写书注意面向读者，力求深入浅出。阮元评论说：“其论算之文务在显明，往往以平易之语解极难之法，浅近之言达至深之理，使读者不待详求而义可晓然。”③由于梅文

① 梅文鼎．勿庵历算书目．见：丛书集成初编．商务印书馆，1939．27

② 同①．28

③ 阮元．畴人传．商务印书馆，1955．483

鼎的工作，使许多西方数学成果在中国生根、开花、结果。特别是对笔算及三角的介绍，意义相当深远。虽然西方笔算早就传入中国，但并未被采用。自从梅文鼎的《笔算》一书出版后，笔算才逐渐在中国得到普及。笔算同筹算、珠算相比，具有能保留运算过程的特点，而且便于数学符号化、抽象化，这对数学理论的进一步发展是有好处的。后来，在初等数学向高等数学过渡的过程中，笔算发挥了巨大威力。对数是欧洲 17 世纪三大数学成果之一，穆尼阁以对数授薛凤祚，始有译本。梅文鼎自著《比例数解》，深入浅出地介绍对数原理及用法，使其为国人接受，这是他的一项功绩。对三角学的介绍，也是如此。

梅文鼎学洋而不崇洋，善于独立思考。在介绍西方数学成果的同时，常常毫不客气地指出西学中的错误。例如，罗雅谷译撰《测量全义》中记有正二十面体的体积与棱长的关系，梅文鼎发现了其中的错误并通过精密推算，得到正确结果[①]。他在《几何补编》中说："《测量全义》云二十等面边设一百，其容五二三八零九……久知其误，今乃得其确算，可见学问必欲求根也。"

在吸收和介绍西学的基础上，梅文鼎致力于探求中西数学的一致性，以便实现中西交融，或曰会通。他认为我国传统的勾股算术和由西方传入的几何学在形式上虽然不同，理论上却可以互通，于是著《几何通解》一书，用勾股理论证明了《几何原本》前六卷中的许多命题。他说："几何不言勾股，然其理并勾股也。"[②]

另外，梅文鼎还探讨了西方三角学与勾股术的关系，说："西法用三角，犹古法之用勾股也。""锐角形分之，则二勾股也，钝

---

① 具体作法可参阅：沈康身．梅文鼎在立体几何上的几点创见．杭州大学学报（自然科学版），1962(1)

② 梅文鼎．勿庵历算书目．见：丛书集成初编．商务印书馆，1939．36

角形以虚补实，亦勾股也。”他认为：“三角即勾股之精理，八线乃勾股之立成也。”① 从实际测量的角度看，梅文鼎的话是对的，用三角学解决的一般测量问题，都可用传统的勾股术解决；而三角学中的许多定理，亦可转化为直角三角形后用勾股定理来证明。梅文鼎认为：“先知勾股而后可以论三角，先知平三角而后可以论弧三角。”②因此，中国传统的勾股术便成为理解西方三角学的理论基础。

梅文鼎认识到勾股术与西方三角、几何的一致性，并在自己的著作中使两者融合，这无论在理论上还是在实践上，都有深远意义。在理论上说明了数学的统一性，即不同形式的数学“理实同归”；在实践中使初次接触西方数学的人们便于理解和应用这些较为精密的科学知识。更重要的是，他开创了中西数学对照研究的正确道路，正是在这条道路上，经过几代数学家的奋斗，实现了中西数学的合流。

当然，我们在充分肯定梅文鼎在会通中西数学中的伟大功绩时，也应指出他思想上的片面性及错误认识。

首先，梅文鼎虽然研究了许多西方数学著作，但他把着眼点放在知识和算法上，对于思想和体系则重视不够，因此没有发现中西数学体系的巨大差异，也就未能吸收西方数学体系中的进步思想。最能说明这一问题的是他对《几何原本》及我国《九章算术》的比较。众所周知，前者是演绎体系，以证明为中心；而后者是算法统驭问题的形式，以算法为中心。徐光启曾高度赞扬《几何原本》的逻辑结构，说此书“有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得”。而梅文鼎对该书的逻辑结构重视不够，他只注意到该书以点、线、面为基本概念，对逻辑结构的精髓——公理系统，毫不在意。在《几何

①② 梅文鼎．勿庵历算书目．见：丛书集成初编．商务印书馆，1939．29

通解》中，他把精力集中在具体题目的证法上，当他发现用传统的勾股术可证明其中多数定理后，便得出“信古九章之义，包举无方”的夸大结论，这便无从吸收西方的公理法思想了。

其次，梅文鼎多次阐发的“西学源于中国”说，在中国数学史上产生了不良影响。实际上这一观点是康熙皇帝首先提出的，他在《三角形论》中说：“西学实源于中法”，“古人历法流传西土，彼土之人习而加精焉。”此说一出，梅文鼎便积极宣传，并加以发挥。他在《筹算》序中说：“古者圣人声教洋溢，无所不通。”在《测算刀圭》序中说：“算术本自中土传人远西。”在《历学疑问补》中又说：“西历源流本出中土，即周髀之学。”总之，在梅氏看来，不管是天文还是数学，都是从中国传入西方的。通过什么途径传入呢？他说：“至于周末，畴人子弟分散。西域天方诸国接壤西陲，非若东南有大海之阻，又无极北严寒之畏，则抱书器西征，势固便也。”[①]实际上，中西之学是各有渊源的，西学中源说的错误不必多言。我们所注意的是形成此种错误的原因。笔者认为不能把它单纯归于梅文鼎的个人失误，也不能单纯归于时代的局限，应该说两者兼而有之。第一，此说出于皇帝之口。在封建社会里，皇帝至高无上，他的观点往往具有权威性，梅文鼎受此观点影响是不奇怪的。第二，当时人们还缺乏数学史知识。传教士尽管把西方数学传入中国，但他们并不清楚西方的数学史，“西人言历也，溯而上之，亦不能言其始于何人；其为算也，亦若是已矣”。[②]在这种情况下，中国人连西方重要数学家的先后顺序尚不清楚，要正确解释西学起源当然不可能。但梅文鼎为什么在毫无根据的情况下把西学说成源于中国呢？主要是由于“天朝大国”的思想在作怪，这便是形成错误论点的第三个原因。当时国内的知

① 李兆华. 简评西学源于中法说. 自然辩证法通讯，1985(6)

② 梅珏成. 梅氏丛书辑要. 同治十三年版

识分子普遍认为，中国是一个文化悠久的大国，“远人慕化”，中学西传是很自然的。于是，中西数学相似的地方，梅氏都说成源于中国，而绝不认为源于西方。例如开方分段之法，我国古代有，西人著作中也有，梅文鼎便说：“开方分段，古人旧法之精……而《同文算指》、《西镜录》本其意以作点定之。”[①]第四，梅文鼎宣传西学中源说，还包含着传播西方科学的目的。在当时，西学曾受到不少人的怀疑和抵制。梅文鼎介绍西方笔算时，就有人责难他：“笔算，西人之法耳，子何规规焉？”[②]他为了使人们比较顺利地接受西方科学，就要“俾天下疑西学者，知其说之有所自来”[③]，于是便大力宣传西学源于中国。上述诸条原因中，大国思想是主要的。这是时代的局限所致。但他提出“周末畴人子弟抱书器西征”，却不能不说是个人的失误。对于这样一个向来注重考证的科学家，此种错误本来是可以避免的。他却在这里单凭主观猜想，把一段毫无史料为证的话堂而皇之地写到书中。由于梅文鼎在数学界的威望及这段话的貌似合理，结果流毒甚广，成为西学中源的“根据”，妨碍了对西学的深入研究。

## 二、对初等数学的总结

梅文鼎以在中国复兴数学为己任，其数学著作遍及初等数学各方面。他的工作是带有总结性的。

首先，梅文鼎以统一的观点看待古今数学，对数学进行了科学的分类。他在《方程论》中说：“夫数学一也，分之则有度有数，度者量法，数者算术。”并解释说：“两者皆由浅入深，是故量法最浅者方田，稍进为少广，为商功，而极于勾股。算术最浅者粟布，稍进为衰分，为均输，为盈朒，而极于方程。”这就是说，数学是量法与算术的统一。很显然，梅文鼎所谓“量法”指几何，而

---

①② 梅珏成．梅氏丛书辑要．同治十三年版

③ 梅文鼎．勿庵历算书目．见：丛书集成初编．商务印书馆，1939．9

"算术"则指代数(包括算术)。自汉代以来,我国的数学著作多是几何、代数不分。梅文鼎把数学明确分为几何、代数两类,写出许多代数和几何专著,这无疑是数学史上的一个进步,因为它有助于对各数学分支进行较深入的研究。梅文鼎的代数专著《方程论》、《少广拾遗》,几何专著《勾股举隅》、《几何通解》、《几何补编》等,都对后世产生了很大影响。清代的代数和几何专著远较前代为多,这与梅文鼎的示范作用是分不开的。

其次,梅文鼎研究数学注意完备性。他一方面总结前人工作,另一方面补前人之不足。他对中西数学的研究都贯彻了这一精神。1680年成书的《中西算学通》包括筹算、笔算、度算、比例算、几何摘要、三角法、方程、勾股、九数9部分内容,可以说是一部小型的初等数学百科全书。该书不仅融合了中西数学,而且对前人的数学工作进行了分类总结,是一部不可多得的优秀著作。梅文鼎的代数专著《方程论》,系统总结了线性方程组的建立与解法,创立了按方程系数对方程进行分类的新方法,并在解分数系数方程时运用了设辅助未知数的方法,从而使方程理论趋于完善。他对各类方程都归纳出一套简明的解法,做到了"晦者使之明,烦者使之约"。

他的《几何补编》则是为了补《几何原本》前6卷之不足。《几何原本》前6卷不言立体几何,梅文鼎便独立研究正多面体及半正多面体的性质,以及正多面体互容问题,"以补原书之未备"。他在书中导出了所有正多面体的体积公式,包括正四面体、正八面体、正十二面体和正二十面体,并进一步获得计算各正多面体内切球径及体积的方法。梅文鼎还研究了两种截割正多面体而获得的半正多面体——"方灯"和"圆灯",发现了一些定理(详见第四节)。

梅文鼎的《平三角举要》和《弧三角举要》是我国最早的平面三角及球面三角著作。虽然这些知识是由西方传入我国的,但

比较零散。梅文鼎进行了全面的整理和归纳工作，写成这两部教科书性质的书，从而使人们对三角学有比较系统的了解。17 世纪以来，我国学者对三角方法已比较熟悉，这与梅文鼎的总结性工作是分不开的。

梅文鼎在总结中算时注重考据，这也是他的数学思想的一个特点。例如，中国古代数学成果多以筹算形式表现，而当时筹算已被淘汰，梅文鼎为了深入理解古人的数学思想，十分重视对筹算的考证，还专门写了一本《古算器考》以明古法。他的《勾股测量》、《堑堵测量》等书中，也有不少考证古算的内容。这种思想在当时是十分必要的，因为经过 300 年的数学衰落，清初的数学园地一派荒芜景象，研究古算必须挖掘史料，进行考证。

### 三、数学中的转化思想

数学中的转化思想是非常重要的。如高维转化为低维，曲线转化为直线，等等。这些转化的实现，不仅加强了新旧知识的联系，变难为易，而且常常创造出新的数学方法，开拓出新的数学领域。梅文鼎在总结中西数学的过程中，十分重视转化，这是他在数学理论上取得进展的重要原因。他的球面三角著作《堑堵测量》和《环中黍尺》，便是体现其转化思想的两本有代表性的著作。

刘徽说过：“斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。”[①] 他把鳖臑当做基本几何体，把许多复杂的体积计算问题化归为鳖臑的体积计算。梅文鼎称之为立三角。他继承并发展了我国古代的转化思想，致力于把球面三角形转化为平面三角形，再转化为直角三角形，以便用人们熟悉的勾股知识来解决。其基本思想是化弧线为直线。他认识到：立三角形顶点旁三侧面的顶角和三侧面间的三个二面角与球面三角形(图 2.2.1 中 $ABC$)的三弧三角相当。于是把球面三角形转化为立三角形来研究。他特别注意立三角与勾股

---

① 刘徽. 九章算术注. 见钱宝琮校点. 算经十书. 中华书局. 1963. 167

形的关系，说："古九章以立方斜剖成堑堵，其两端皆勾股。再剖之，则成锥体，而四面皆勾股矣。""用立三角以量体者，仍平三角也，而用平三角以量面，仍勾股也。"①由于立三角可由堑堵分解而得，故书名为《堑堵测量》。

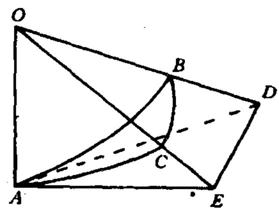


图 2.2.1

《环中黍尺》进一步发展了《堑堵测量》的基本思想，在世界上首次使用投影法把球面三角形转化为平面图形。100 年后，西方才提出类似的投影方法。

梅文鼎的投影思想是在研究天球时产生的。他设想一个人"置身天外，以平观大圈之立体"，于是"周天三百六十经纬之度擘划分明，皆能变浑体为平面"。②在说明球面上的点与投影图之对应关系时，他说："如浑圆中剖，则成平面……以球面各点依视法移于平圆面，即浑圆内相应之点也。"这就是说，他是以穿过球心的平面为投影面的。通过这种方法，大大简化了球面三角问题(详见第五节)。

## 第三节 对算术与代数的总结性研究

### 一、笔算

《笔算》5 卷，定稿于康熙三十二年(1693 年)。梅文鼎接受了《同文算指》中的四则算法，但数字及算草均由横写改为竖写。自序说："天方国(阿拉伯)字自右而左，欧罗巴字自左而右，皆横列为行，彼中文字尽然也。彼之文字既横，故笔算亦横，取其便于彼用耳，非求异于我也。我之文字既直，故笔算亦直，亦取其便

①② 梅珏成. 梅氏丛书辑要. 同治十三年版

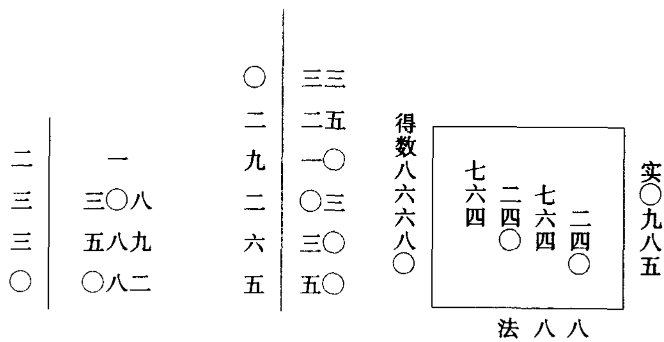
于用耳，非矜胜于彼也。”“发凡”说：“笔算易横为直以便中土，盖直下而书者中土圣人之旧而吾人所习也。”

《笔算》中首先介绍列位的方法，从上到下竖行中，依次表示数位由高到低，空位用零表示。小数与整数列位的区别在于“以单位为根”，即必须表明个位，梅文鼎用“根”字表示个位。

书中重点介绍了笔算加、减、乘、除及开方法。算式 1 和算式 2 就是加法和减法算式，分别表示

892＋1 088＋350＝2 330

和　　　350 300－321 035＝29 265。



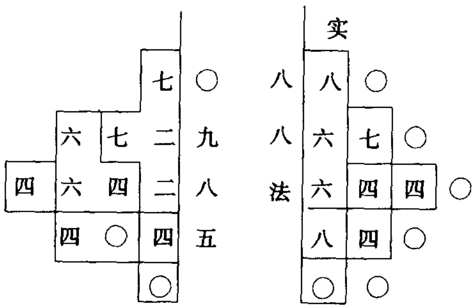

算式 1　　　　算式 2　　　　算式 3

乘数和除数称为“法”，被乘数和被除数称为“实”。在乘法算式中实写在右边，法写在下边，把每位数字相乘的结果写在中间方框内，本位与实的相应数位对齐，进位写在上一横行的左边，最后把方框内的结果按横行相加即得结果。如算式 3 即表示

0.985×88＝86.68。

除法算式分为四部分，由两条直线分开，两线之间的距离应能书写两行数字，实写在右直线的右边，法写在右直线的左边，商写在左直线的右边并比实高一位。以商乘法得数写在左直线之左，并从实中减去，凡是用过的数字都用方框划掉，如算式 4，就是

86.68÷88＝0.985。




算式 4

梅文鼎的开方算式与除法算式相似，也用两条直线，不同的是除法中的法在开方中变成了方法、廉法、隅等，所用算理与《九章算术》相同。书中分别记载着开平方和开立方的笔算方法。

《笔算》除了介绍四则运算外，还讨论了比例问题。比例在《九章算术》中称为今有术，元代称为“异乘同除”，而《同文算指》称为“三率法”。梅文鼎指出三率法与异乘同除法是统一的，他说：“以先有之数，知今有之数，两两相得，是生比例，莫善于异乘同除，乃古《九章算术》之枢要也。先有者二，今有者一，是已知者三，而未知者一，用三求一，故西法谓之三率。”在《笔算》中，梅文鼎给出比例的下述性质和定理：

(1)“凡二率三率相乘，与一率四率相乘等积”，即比例的外项积等于内项积，梅氏称为“立法之根”。实际上，这正是比例的基本性质。

(2)“三率八变”。设 $ad=bc$，则有下列八个比例式成立：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{c}{d}=\frac{a}{b},\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{b}{d}=\frac{a}{c},\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}。$$

（3）“异乘同除约分法”，即比例的内项可与外项约分，其值不变。

（4）更比定理和反比定理。

（5）“并乘除法”。设$a:b=c:d$，$e:f=g:h$，则

$$ae:bf=cg:dh,$$

此即复比例。

《笔算》的另一项成就是讨论了算术运算律。梅文鼎明确提出乘法交换律，即“法、实在乘法可以互用”。“截小总法”称：“凡并法，头项太多者，截分小总则易清。”这实为加法结合律：

$$a+b+c=a+(b+c)。$$

“截乘法”所表述的为乘法结合律：

$$a\times b\times c=a\times(b\times c)。$$

算术运算律早已为中算家所用，而在理论上给予明确表述，《笔算》是第一次。虽不完整，但在数学史上仍有一定意义。在此基础上，清中期的焦循对算术运算律有了进一步研究，并写成专著《加减乘除释》。

《笔算》的意义不仅在于算术。书中的笔算方法，被梅文鼎用于代数、几何、三角等各类数学著作。此后，笔算方法逐渐在中国普及。在由初等数学向高等数学过渡的过程中，笔算发挥了重要作用。

## 二、筹算

《筹算》初稿为7卷，在《梅氏丛书辑要》中精简为2卷。《西洋新法历书》中有《筹算》1卷，介绍西方筹算。原术用直筹横写，梅文鼎《筹算》改为横筹直写，并以两个半圆形代替原有的斜线，应用较便。利用这种算筹，可进行加、减、乘、除及开方运算。

乘除法共用10种筹，分别称为第一、二……九筹和空筹，每筹上刻有18个半圆，共9个数，半圆中分别是用1～9乘的结果，

个位在下边的半圆，十位在上边的半圆。今选《筹算》中乘、除各一例如下：

(1) 4 096×64=262 144。

法为 64，故取第六、四两筹并列，如图 2.2.2。分别查出第六、九、四三个竖行中的数值，两半圆相对恰合成一整圆时，两半圆内的数相加，则依次为乘的结果。即

$$64\times 6=384,$$

$$64\times 90=5\ 760,$$

$$64\times 4\ 000=256\ 000。$$

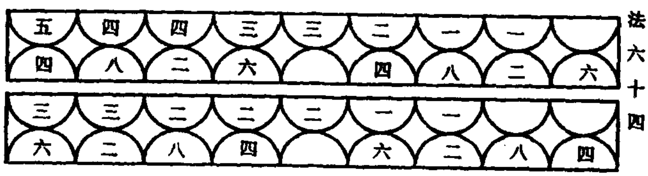



图 2.2.2

以上各数都可从算筹上直接读出。三数相加则须笔算，所以筹算离不开笔算。

(2) 343 154÷9.65=35 560。

除法为乘法的逆运算。取第九、六、五筹，自上而下并列，查第三竖行中数为 2 895 与实中前四位 3 431 接近，故商 3，从 3 431

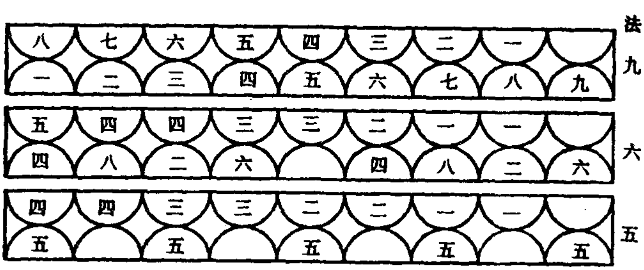



图 2.2.3

中减去 2 895 余 536，查第五行 4 825 接近余实，故续商 5，从实中减去，依此类推，直到求出结果，如图 2.2.3。

筹算也可以用来开方，只是比乘除法多两根筹，一为平方筹，一为立方筹，分别刻有 1～9 的平方和立方。梅文鼎不了解宋元时代的增乘开方法，其开方法比较复杂。

**三、度算**

度算即用比例规计算。比例规是由两条直尺组成的可以开合的双脚尺，尺上按照需要刻上各种刻度，而且两尺刻度完全相同。《崇祯历书》中有罗雅谷撰《比例规解》1 卷(1631 年)，原无例题显示用法。梅文鼎青年时代即自制比例规，后写成《度算释例》2 卷。1717 年，85 岁的梅文鼎对该书重加校订而出版问世。

《度算释例》一书从制作方法、使用原理和用法等多方面介绍了比例规。比例规“用厚铜片或厚纸或厚木等”做成两个相同的尺，使宽为长的 1/8 左右，并使二尺在一头相合，固定在轴心上，两尺可自由开合。尺上分别作出各种带有刻度的直线，直线都从轴心出发。如图 2.2.4。《度算释例》给出 10 种不同系列的刻度线。现介绍其中的 5 种：

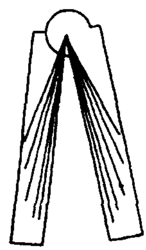


图 2.2.4

(1)平分线。这是 10 种线中最简单的一种。刻度从轴心算起，均匀刻于尺上，共 20 格，每格 10 个单位，可用来计算各种比例问题，包括等分线段、乘法、除法等。

(2)平方线。尺上刻度按平方根比排列，如 $A$，$B$ 两点的刻度为 $m$，$n$，则 $A$、$B$ 两点到轴心的距离比等于 $\sqrt{m}:\sqrt{n}$。因而刻度由疏渐密，不均匀排列。此尺用于计算与开平方有关的各种问题。

(3)立方线。刻度与平方线类似，按立方根排列，用于计算与开立方有关的问题。

(4)正弦线。两刻度点到轴心的距离比等于它们所表示的度数的正弦比，计算与正弦相关的各种问题。

(5)切线。两刻度点到轴心的距离比等于它们所表示的度数的正切比，计算与正切相关的各种问题。

**四、方程论**

此处的“方程”指线性方程组。《方程论》6 卷，写于 1672 年，专门讨论线性方程组的分类、解法和应用。《九章算术》中有“方程”章，刘徽讨论了“方程”的性质并改进了解法，宋代秦九韶的方程组解法与今几乎相同。但明代数学衰微，学者们对“方程”的实质已不太清楚了。《算法统宗》等书中的方程问题，在分类及解法方面都有讹误。梅文鼎没有见到宋元及以前的有关论述，对当时的论述又不满意，于是进行独立研究，写成线性方程组方面的专著《方程论》。该书按系数将方程组分为四类：

(1)“合数方程”，即每个方程中系数的符号一致。

(2)“较数方程”，即每个方程的系数符号有变化。

(3)“和较杂方程”，即方程组中有的方程系数变号，有的方程系数不变号。

(4)“和较交变方程”，指在消元过程中“合数方程”与“较数方程”由一者变为另一者所产生的方程组。

梅文鼎解线性方程组的一般方法是互乘对减，逐次消元，得三角矩阵后再用代入法求得各未知数，为《九章算术·方程》的忠实复原。他纠正了程大位《算法统宗》、李之藻《同文算指》等书中有关方程的一些错误，并举 90 多例以说明“方程”的用途。他的工作使人们对方程有了新的认识，向人们提供了学习方程组理论的较好材料，使方程组的应用更为广泛。

**五、开方术**

梅文鼎的《少广拾遗》1 卷(1692 年)是讨论开方术的。北宋已有增乘开方法，南宋秦九韶对此作了发展。但在梅文鼎时代，这

些成果还没有被挖掘出来，他只从《算法统宗》等书中见到了贾宪的“开方作法本源”图。他据此详细讨论了开 2 次、3 次乃至 13 次方的具体程序。他把贾宪三角形(开方作法本源图)推广为“廉率立成”图，实际上给出了从平方到 13 次方的二项式定理系数表，如图 2.2.5。在讨论以几何图形表示乘方时，梅文鼎说：“三乘方以上不可为图。”这一论点是正确的。

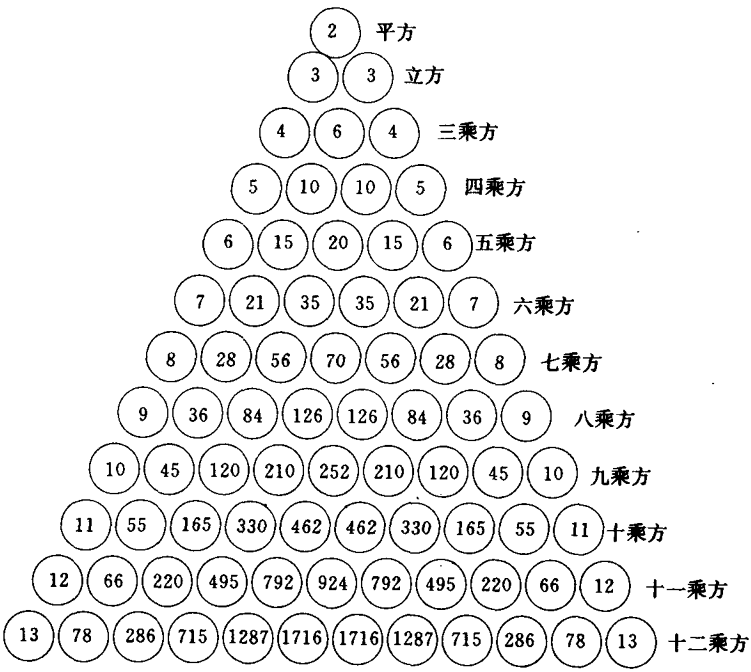



图 2.2.5

# 第四节 几何方面的会通中西工作

## 一、对勾股问题的研究

在《勾股举隅》中，梅文鼎设计了一种证明勾股定理的方法。如图 2.2.6，甲乙丙为勾股形，□甲寅为勾的平方，□甲丁为股的平方，□乙辛为弦的平方。按图分割，并作下列拼补：丙丁辛→乙壬庚，癸庚辛→甲乙丙，从而弦方乙辛变成了庚己和甲丁两正方形，而庚己等于甲寅，故弦方等于勾方加股方。

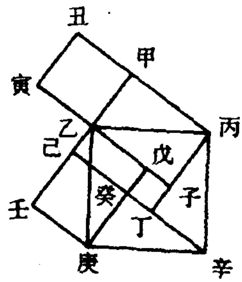



图 2.2.6

梅文鼎注意到勾、股、弦和勾股形面积四者中已知其二，便可得其余二者。在《勾股举隅》中，他列举了 13 个求勾、股、弦的题目，都是用几何图验法结合代数法解直角三角形的。在这些题目中，他使用了不少代数恒等式，其中最重要的当属下式（以 $a,b,c$ 代勾、股、弦，$S$ 为勾股形面积）：

$$
\begin{aligned}
&[c-(b-a)][c+(b+a)]\\
&=[(b+a)-c][(b+a)+c]\\
&=4S。
\end{aligned}
$$

梅文鼎说："（上式）乃立法之根也。而其理皆具古图中，学者所宜深玩。"这里的"古图"指赵爽的"勾股圆方图"，如图 2.2.7，梅文鼎便是通过图形的等积变换来验证上式的。

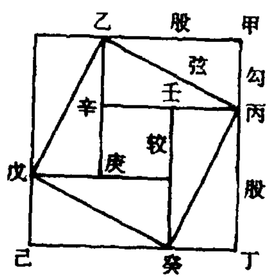



图 2.2.7

在《勾股举隅》中，梅文鼎还探讨了勾股测量问题，在不了解前人工作的情况

下，重新对“海岛”公式作了证明。如图 2.2.8，$CD$，$EF$，$CE$ 各线的长度已知，且 $CG=EH$，求 $AB$ 的长度。公式为：

$$AB=\frac{CE\times CG}{EF-CD}+CG。$$

梅文鼎的证明思路如下：

$$▭GB=▭GN, \quad ①$$

$$▭HB=▭HM。 \quad ②$$

②－①，得

$$▭HB-▭GB=▭HM-▭GN,$$

作长方形 $LM$，使 $LE=CD$，则 ▭$CH$＝▭$PM$。因▭$CH=CG\times CE$，又▭$PM=(EF-CD)\times AI$，变长方形 $PM$ 为 $CH$，则有

$$AI=\frac{CE\times CG}{EF-CD}。$$

加 $CG$ 即得“海岛”公式。

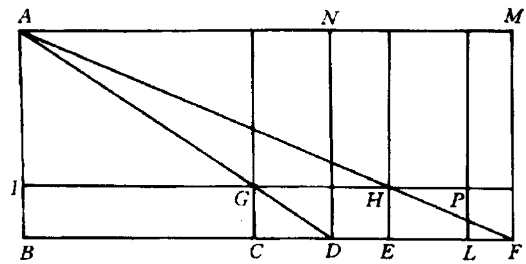



图 2.2.8

## 二、用勾股定理处理西方几何问题

梅文鼎认为我国传统的勾股算术和由西方传入的《几何原本》形式上虽不相同，但它们的理论可以互通，于是撰《几何通解》1 卷，依据勾股理论证明了《几何原本》前 6 卷中的许多命题。例如卷三第三十六题：从圆外一点 $A$ 作圆的切线 $AB$ 和割线 $AC$ 与圆交于 $D$，则 $AC\times AD=AB^2$。梅文鼎的证明方法如下：

如图2.2.9，过$A$和圆心$O$作割线与圆交与$E$，$F$两点。勾股形$OBA$以$OB$为勾，$BA$为股，$OA$为弦。$AF$为勾弦较，$AE$为勾弦和，所以

$$AE\times AF=AB^2。$$

再从$O$作$AC$的垂线$OK$，连$OD$线，则

$$\begin{aligned}AC\times AD&=AK^2-KD^2\\&=AK^2-OD^2+OK^2\\&=AO^2-OD^2\\&=AF\times AE,\end{aligned}$$

所以$AC\times AD=AB^2$。

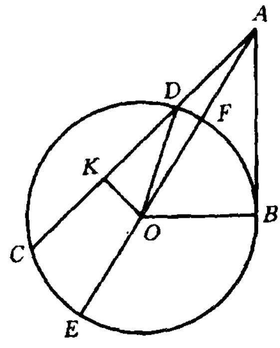



图 2.2.9

在《几何通解》中，梅文鼎从勾股形出发探讨了理分中末线，他说："唯理分中末线与勾股异源，今为游心于立法之初，而仍出于勾股。"所谓理分中末线，即黄金分割，又称中外比，指把一条线段分成两部分，使得较长部分（大分）为较短部分（小分）和整个线段（全分）的比例中项。如以点$C$把线段$AB$分为两段使得

$$AC^2=AB\times BC,$$

其中$AB$为全分，$BC$为小分，$AC$为大分。小分与大分之比为$(\sqrt{5}-1)/2$，称为"黄金比"。

梅文鼎对理分中末线的研究集中于《几何通解》。他通过勾股形的性质，研究了理分中末线的作法、证明与应用。他首先得出勾弦和$(a+c)$、股$(b)$、勾弦较$(c-a)$为连比例，即

$$\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}。$$

又令$b=2a$，则

$$\frac{c+a}{2a}=\frac{2a}{c-a}。$$

因而当 $a$，$2a$，$c$ 构成勾股形时，若令 $c+a$ 为理分中末线大分，则 $2a$ 为全分，$c-a$ 为小分，这就是研究理分中末线的依据。据此他给出了理分中末线的六种作法，并证明了其作法的正确性。例如已知大分求全分和小分法如下：

设 $AB$ 为已知线，作 $AC\perp AB$，使 $AC=\frac{1}{2}AB$，在 $AC$ 的延长线上取 $E$，使 $AE=2AC=AB$，又在 $CA$ 的延长线上取 $D$，使 $CD=CB$，则 $ED$ 为全分，$AD$ 为小分。证明：设 $CB$ 为 $c$，$AC$ 为 $a$，则 $AB=2a$，$ED=CD+CE=c+a$，$AD=CD-AC=c-a$。

**三、对立体几何的研究**

《几何补编》和《方圆幂积》二书集中体现了梅文鼎的立体几何工作。在前书中，他研究了 5 种正多面体和 2 种半正多面体，提出不少独到见解。在后书中，他利用割补方法和极限知识研究球的体积和表面积，得出一些正确公式。梅文鼎的工作，一方面继承和发展了我国古代的有关成果，另一方面为后世的研究打下了基础。

**1. 球的体积和表面积**

球体积问题已被刘徽和南朝的祖冲之、祖暅之解决。至于球的表面积，朱世杰曾在《四元玉鉴》中予以讨论（“杂范类会”第六题），虽然他给出的公式

$$\text{球面积}=\frac{3}{4}\times\text{外切正圆柱侧面积}$$

有误，但他首次注意到球的表面积这样一个有重要意义的几何量，可谓慧眼独具。遗憾的是，直到明末，我国再没有人注意这一问题，当然更没人来纠正朱世杰的错误了。

梅文鼎在不了解刘、祖、朱的工作的情况下，独立研究球体积和球的表面积，得到如下结论：

（1）球体积是其外切圆柱体积的 2/3。

（2）球的表面积是同径大圆面积的 4 倍。

(3)球体积是大圆为底、半径为高的圆锥体积的 4 倍。

2. 正多面体求积

正多面体共 5 种，除了正六面体即正方体外，还有正四、八、十二及二十面体。梅文鼎计算正多面体体积的方法大致如下：

(1)把正多面体按面数分为全等的正棱锥，其底为正多面体的一面，锥顶即原正多面体之中心。如把正二十面体分成 20 个正三棱锥。梅文鼎把这样分出来的正棱锥称为原多面体的分体。他就是通过计算分体体积来求原正多面体体积的。

(2)求分体的底面积。在已知正多面体棱长的情况下，关键是求底面的边心距。正四、八、二十面体的底面是正三角形，边心距易得。正十二面体的底面是正五边形，如图 2.2.10，设边心距为 $L$，棱长为 $a$，则梅文鼎的方法相当于

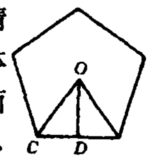



图 2.2.10

$$L=OD=CD\times\tan 54^\circ=\frac{1}{2}a\times\tan 54^\circ。$$

(3)求分体的高，并进而求得分体的体积。在计算正十二面体和正二十面体的分体高时，梅文鼎用到理分中末线的性质。

(4)求总体积。面数乘以分体体积即可。

3. 正多面体互容

这一问题在《几何补编》中有详细论述。梅文鼎一一列举了正四、六、八、十二、二十面体及球的互容关系，他阐明了两个正多面体相容时切点(或线、面)有多少，以及在什么位置相切[①]。他称相容两体中在内之体为“所容”，在外之体为“能容”，正确指出：“凡相容两体之相切，或以尖，或以边，或以面。”例如，能容体为正十二面体、所容体为正二十面体时，以尖切面，切于十

① 详见：李迪，郭世荣. 清代著名天文数学家梅文鼎. 上海：上海科学技术文献出版社，1988. 160

二处，切点为表面中心。

在研究相容两体的相对位置时，梅文鼎提出了正多面体的作法，尤其注意利用理分中末线。对于正六面体(正方体)容正十二面体，他说："置十二等面边为理分中末线之小分，求其全分为外切立方边。"这就是说，正六面体棱长与正十二面体棱长之比等于全分与小分之比。他还说："十二等面之边，正切于立方各面之正中凡六，皆遥相对如十字。"这样，可得 12 个顶点。然后把正方体体心与顶点连线作黄金分割，使短的一边靠近顶点，这 8 个分割点便是正十二面体的其余 8 个顶点。对于正方体容正二十面体，梅文鼎指出："立方根与所容二十等面之边若全数与理分中末线之大分也。"他把正方体的棱作黄金分割，取较长部分为正二十面体的棱长，从而得到正二十面体的 12 个顶点。[1]

4. 半正多面体

多面体的各个面如由不同种类的正多边形组成而各多面角都是全等的多面角，这种多面体称为半正多面体，或称阿基米德体。史载阿基米德首先发现仅有的 13 种半正多面体。

在《几何补编》中，梅文鼎研究了“方灯”和“圆灯”两种

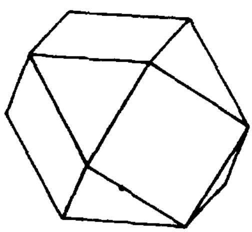


图 2.2.11

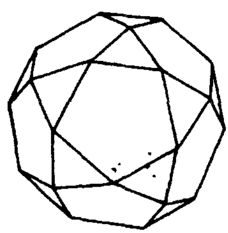


图 2.2.12

① 详见：李迪，郭世荣．清代著名天文数学家梅文鼎．上海：上海科学技术文献出版社，1988．160

半正多面体。他是通过正多面体得到半正多面体的：取正多面体每条棱的中点，连接相邻中点并剖去外凸部分，即得一个半正多面体。梅文鼎说："凡诸体改为灯，皆半其边，作斜线剖之。"他把由正六和正八面体所得半正多面体称为方灯，由正十二和正二十面体所得半正多面体称为圆灯。方灯有 6 个全等正方形面和 8 个全等正三角形面(图 2.2.11)，而圆灯有 12 个全等正五边形面和 20 个全等正三角形面(图 2.2.12)。

在《几何补编》中，梅文鼎还给出方灯和圆灯的如下几何性质：

(1)两种灯体的顶点数之倍，恰为棱数。例如，方灯"有边棱二十四，而皆同长，棱尖凡十有二"。

(2)两种灯体都可依棱横剖，截口是平面图形。梅文鼎说："凡灯体之棱，皆可以联为等边平面圈。"

(3)两种灯体都可以补成正多面体。

## 第五节　对三角学的贡献

### 一、平面三角研究

梅文鼎以前，我国出现的三角学著作或由外国人编写，或由中外学者合作编译。梅文鼎的《平三角举要》是中国人写的第一部三角学专著。该书共 5 卷。卷一"测算名义"叙述平面三角学中的基本定义和有关三角形的几何定理。卷二"算例"举例说明直角三角形解法和一般三角形解法，其中用到正弦定理和正切定理。卷三"内容外切"讨论三角形面积，三角形的内切圆、外接圆与内容正方形。卷四为"或问"。自序说"同学好问，事事必求其所以然，故不惮为之详复以畅厥旨"。卷五"测量"举例说明平面三角法在实

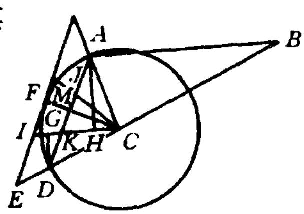


图 2.2.13

际测量中的应用。

在卷四中，梅文鼎给出了各定理的证明，其中不少证明方法是梅文鼎创造的。例如，正切定理的证明。如图2.2.13，设有三角形$ABC$，$\angle DCA$为$\angle C$的外角，$CF$为外角的平分线，$EF$为圆的切线，$CI /\!/ AB$，$AH=\sin\angle ICA=\sin A$，$DG=\sin\angle DCI=\sin B$，由$\triangle DGK \backsim \triangle AHK$可得

$$(AH+DG):(AH-DG)=(AK+DK):(AK-DK),$$

即

$$(\sin A+\sin B):(\sin A-\sin B)$$
$$=AD:JK=MD:MK=FE:FI$$
$$=\tan(\frac{A+B}{2}):\tan(\frac{A-B}{2})。$$

由正弦定理易得

$$(a+b):(a-b)=(\sin A+\sin B):(\sin A-\sin B),$$

所以

$$\tan\frac{(A+B)}{2}:\tan\frac{(A-B)}{2}=(a+b):(a-b)。$$

这就是正切定理。

## 二、球面三角研究

梅文鼎的《弧三角举要》是我国最早的球面三角著作。他的另外两部球面三角著作是《堑堵测量》和《环中黍尺》。

### 1. 球面三角形的一般解法

球面三角形在梅文鼎的著作中都被称为弧三角形，《弧三角举要》(1684年)便是讨论球面三角形解法的。该书共5卷。卷一“弧三角体势”简介球面三角形的基本定理及其在天文学中的应用。卷二“正弧三角形”讨论直角球面三角形的解法。卷三为“垂弧法”。过球面三角形一个角的顶点作大圆弧与对边成直角，把原三角形分为两个直角三角形或补成两个直角三角形，所作的弧称为垂弧。斜三角形中已知二边一角或二角一边求余边余角的问题，可以利用垂弧转化为直角三角形来解决。卷四为“次形法”，

其原理是利用弧与角的对称、互余、互补，把不易求解的三角形转化为易解的三角形。转化后的三角形被称为原三角形的次形。卷五“八线相当法”给出三角函数的各种比例式，以备解球面三角形时查用。

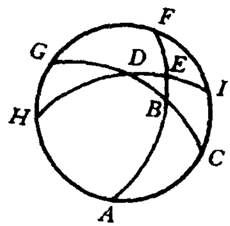



图 2.2.14

次形法是解球面三角形的一种十分有效的方法。梅文鼎指出此法的作用是“易大为小”和“易角为弧，易弧为角”，就是说它可以使边角互换，还可使大边、大角变小。利用次形法可以避免对大于 90 度的弧、角作三角函数运算，使得全部三角定理都可以通过几何线段间的关系获得。例如，已知正弧三角形 $ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，利用次形可求三边。如图 2.2.14，作次形$\triangle BDE$，使 $BD=90°-BC$，$BE=90°-AB$，$\angle DBE=\angle ABC$，$\angle DEB=90°$，$DE=90°-\angle A$。

在$\triangle BDE$ 中，由正弦定理得

$$\sin\angle DBE:\sin\overset{\frown}{DE}=\sin\angle DEB:\sin\overset{\frown}{BD}。$$

所以

$$\sin B:\sin(90°-\angle A)$$

$$=\sin 90°:\sin(90°-\overset{\frown}{BC}),$$

即 $$\sin B:\cos A=1:\cos a。$$

同理可得含有 $b$，$c$ 的等式。

2. 球面三角形的模型表示

在《堑堵测量》中，梅文鼎建立了球面三角形的几何模型——“立三角仪”。他仔细考察了古今仪器，认为没有一种合适的模型可用来研究球面三角。平面三角可用图表示，而球面三角则“难以笔显”，虽然可以通过“视法”把球面三角形的弧、角关系投影

到平面上来研究，但投影后线的长度有变化。于是他“深思其故”，制作了立三角模型。这种模型实际上是由堑堵截割而得的鳖臑(见本章第二节)。它以一面为底，其他三面聚于一点为顶点，顶点旁三侧面的顶角和三侧面间的三个二面角与球面三角形的三弧三角相当。梅文鼎用底面和二侧面都是勾股形的立三角形来阐明球面直角三角形的边角关系。

梅文鼎的立三角形所反映的是球面三角形三角八线的真实情况。如图 2.2.15，每个侧面内都有三个相似勾股形，如$\triangle ONM\backsim\triangle OAK\backsim\triangle OJC$，三个侧面共有 9 个相似勾股形。利用这些勾股形可以不用角只用边解$\triangle ABC$，即可由两边求第三边，书中给出了有关公式。梅文鼎认为自己设计的立三角既可包揽东西两法又为三角八线建立了模型，他高兴地说：“立三角为量体所必需，然此义中西皆未发。”他认为这一模型使得“西法通于古法”，“古法通于西法”，“弧度中八线相为比例之理，了如掌纹”。[①] 梅文鼎的立三角模型对于理解球面三角形确实是一种非常有用的辅助工具。

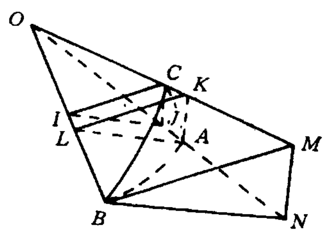



图 2.2.15

**三、领先于世界的投影方法**

众所周知，中国传统数学在元代达到最高峰后，便走了下坡路。从整体上来说，清代数学落后于西方。但不应忽视的是，自明末清初西方初等数学传入中国后，梅文鼎等中国数学家在“会通中西”方面做了艰苦卓绝的工作，在某些问题上超过西方。梅文鼎的三角投影法便是突出的一例。

1. 16～17 世纪的西方三角学

① 梅文鼎. 勿庵历算书目. 丛书集成初编. 35

三角学作为一个独立学科，是从德国数学家列吉奥蒙坦的名著《论各种三角形》开始的。该书出版于1533年，共分五章，前两章讲平面三角，包括各种直角三角形、等腰三角形和斜三角形的解法，并在第二章给出一般三角形的正弦定理；后三章讲球面三角，详细讨论了由三个条件确定球面三角形的问题。列吉奥蒙坦正确指出：不仅可用球面三角形的三边确定它的三个角，而且可用球面三角形的三个角确定它的三条边；又指出球面三角形的内角和大于二直角，这些都是球面三角与平面三角的重要区别。他在书中给出了许多新的球面三角公式，如球面三角的正弦定理（下面以现代符号表示）

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

及余弦定理

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A。$$

他还制成7位正弦表和5位正切表，他的这些工作推动了三角学的发展。

但是，列吉奥蒙坦的正弦定义仍是传统的，即把弧$AD$的正弦说成$AB$（图2.2.16）。对正弦定义作出改进的是哥白尼的学生、德国数学家里蒂克斯（G. J. Rheticus，1514～1576），他把$AB$说成$\angle AOB$的正弦，这就和现代一致了。

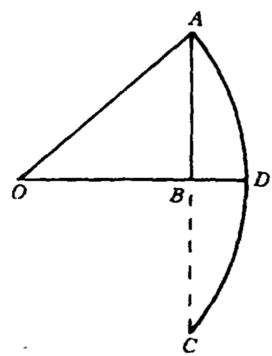


图 2.2.16

韦达在三角方面的工作也是卓有成效的。他的《应用于三角形的数学定律》（1579年）一书系统整理了当时的平面三角和球面三角知识，并把解直角三角形和斜三角形的公式收集到一起，其中包括他首次

发现的正切定理：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}。$$

由于列吉奥蒙坦等人的工作，三角学从天文学里分出来，成为数学的一个分支，并获得独立发展。这门科学在天文、航海、测量等方面，发挥了越来越大的作用。但是，他们的球面三角公式都是在球面上得到的，球面三角形问题也是在球面上解决，比较烦琐。梅文鼎在吸收西方三角知识的基础上，采用投影变换的方法把球面三角形转化为平面图形来研究，从而简化了运算。下面将详细讨论这一问题。

2.《环中黍尺》的投影原理

(1)正形的概念。梅文鼎为了研究球面三角问题，把球面上的弧三角形(即球面三角形)垂直投影于一个穿过球心的平面，得一曲线三角形，梅文鼎称该三角形为“正形”。这种正形在《环中黍尺》中有广泛的应用。由于在作出一弧三角形的正形后，可用直尺在图上直接量出所求弧或角的正弦、正矢，所以本书取名《环中黍尺》。弧三角正形的作法是“先作一外周，以一边就其真度。其余二边必与此一边之两端相遇于外周而成角，此相遇之两点，即余两弧起处。”① 这就是说，选择弧三角形的一边所在的大圆为投影面，将其余两边投影到这一平面，组成一个平面上的曲边三角形。梅文鼎创造性地利用投影原理，把球面三角问题转化为平面三角问题来解决，这是他对三角学的最大贡献。

(2)正形图与斜视图的比较。为了研究天文上的球面三角问题，需要“以平写浑”，即把球面图形，经过投影变换，转为平面图形。梅文鼎说：“作图之法有二，一为借象，一为正形。”(卷

① 梅文鼎. 环中黍尺卷二. 梅氏丛书辑要. 以下所引梅文鼎言论均取自该书。

一)借象即斜视之图，光线与投影面不垂直；正形即垂直投影面的投影所得图形。他进一步指出："置二极于上下，而从旁平视之，如置身大圆之表以观大圆，则浑球上凸面之经纬弧角，一一可写于平面，悉为正形。"(卷一)这种投影实际是以二分点连线为投影线，如图 2.2.17。①

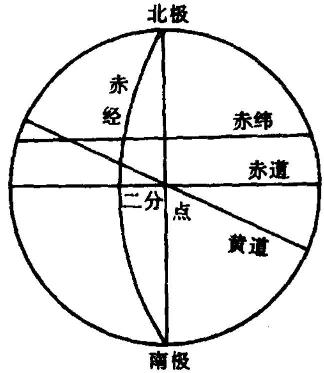



图 2.2.17

如果是斜视图，黄赤交点便偏离圆心了。只有在不得已时才用斜视图，而尽量采用正形图，这是为什么呢？梅文鼎说："斜视之图，无实度可记，其实度非算不知。兹者平仪既为正形，则度皆实度，循图可得，即量法与算法通为一术。"(卷一)

(3)矢的用法。三角函数线中，梅文鼎用矢线(即正矢)最多。他说："八线中有矢，他用甚稀。乃若三边求角，则矢线之用为多，而又特为简易。"

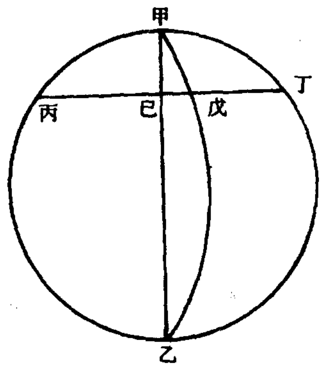



图 2.2.18

矢有弧矢与角矢两种，其实质一样。

先看弧矢。甲巳即甲戊(甲

① 书影见图 4.2.10。

丁、甲丙)之矢，其度等(如图 2.2.18)。巳乙即戊乙(丙乙、丁乙)之矢。若丙丁平移至圆径，则甲巳为甲戊之正弦。

再看角矢。如图 2.2.19，过乙作直径，再作垂直于它的直径，交角的两边于寅、辛，则线段寅辛为乙锐角之矢(辛甲为乙钝角之矢)。若过辛作一垂直于寅辛的直线，则寅辛为寅巳之矢，寅辛横线与寅巳弧线等(因为寅是以巳庚为直径的圆的极，寅到圆上任一点距离相等)。

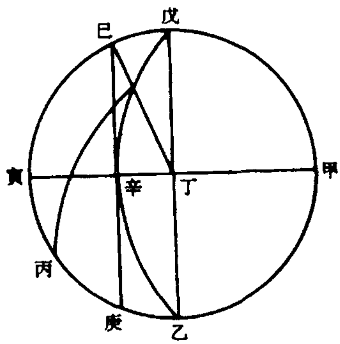


图 2.2.19

这样作的矢与我们定义的正矢

$$\text{vers } A = 1 - \cos A$$

是一致的：①乙角与寅辛同度，②寅辛与寅巳同度，③寅巳与角巳丁寅同度，④角巳丁寅的余弦线为辛丁，而寅丁－辛丁＝寅辛，即 1－辛丁＝寅辛。

(4)正形图中视度与实度之关系。梅文鼎说：“平仪有实度，有视度，有直线，有弧线……弧线在平面，唯外周为实度，其余皆视度也。”(卷二)又说：“置浑球于案，自其顶视之，则唯外周三百六十度无改观也。其近内之弧度，渐以侧立而其线渐缩而短。离边越远，其侧立之势益高，其跻缩之势愈甚。至于正中，且变为直线，而与直径齐观矣。”(卷二)

以上是定性描述，下面还有定量描述。

关于弧度，梅文鼎说：“弧度者，纬度也。”(卷二)即以纬度表示弧度。距等圈上任一经线之弧的度数相等(距等圈是与大圆平行的小圆，在正形图上为直线)。因此，对距等圈上任一弧，可以量外围之弧而得其度数，如图 2.2.20。

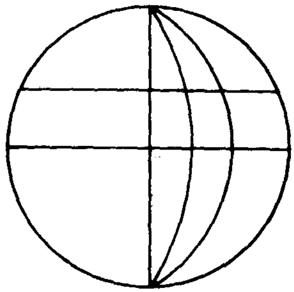


图 2.2.20

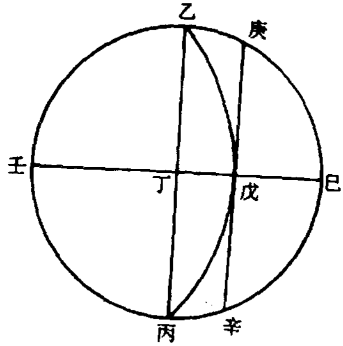



图 2.2.21

关于角度，梅文鼎说："角度者，经度也。"即以经度表示角度。又说："经度之数，皆在腰围之大圆。此大圆者在平仪，则变为直线。"（卷二）如图 2.2.21，巳戊弧即丙锐角之度，戊壬弧即丙钝角之度。这里所表述的，实际是球面三角的一个定理：球面角的度数和以它的顶点为极而夹在两边的大圆弧同度。

但弧巳戊、壬戊皆因视法变为直线，怎样量其度呢？梅文鼎说："于戊点作庚辛直线与乙丙直线平行，则巳庚弧之度即戊巳弧之度，亦即丙锐角之度。"（巳为以庚辛为直径的圆的极，故巳戊与巳庚同度。）①

3. 利用正形证明三角定理

梅文鼎利用正形法解球面三角形和证明球面三角公式，获得良好效果。余弦定理、积化和差公式等都是用正形法证明的。在卷一的"约法"中，梅文鼎给出了余弦定理的两种形式，第一种是知两边一夹角求对边，第二种是知三边求角，这两种形式在梅氏的"初数次数法"中皆有详细论述。我们只分析第一种形式。

① 借助于这些投影性质可以解球面三角形。详见第四编第二章第一节第二段。

“约法”中说：“凡求对角之弧，半径方一率，正弦矩二率，角之矢三率，两矢较四率。”设所求边为$b$，且$c>a$，单位圆半径1，则

$$\frac{1}{\sin a\cdot\sin c}=\frac{\text{vers }B}{\text{vers }b-\text{vers }(c-a)}。$$

把vers $B$换成$1-\cos B$，则

$$\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos B。$$

“初数次数法”与王锡阐“先数后数法”略同。

(1)求第一比例式。①以大小两边各引长之，满半圆，遇于戊，作戊甲乙圆径。又于圆径折半处，命为浑圆心。如图2.2.22。②又自巳辛作横半径，则寅辛即乙角之弧，亦即乙角之矢(球面之弧，平面之矢)。③自丁作横半径巳辛之平行线壬丁甲，此平行线即乙丁大边之正弦(因乙丁与乙壬等，乙壬正弦为壬甲)。丁壬为距等圈上丁壬弧之矢线。④此大小两矢线(寅辛与丁壬)各与其半径之比例等。一率半径巳辛，二率大弧正弦壬甲，三率乙角矢寅辛，四率先得数壬丁，即

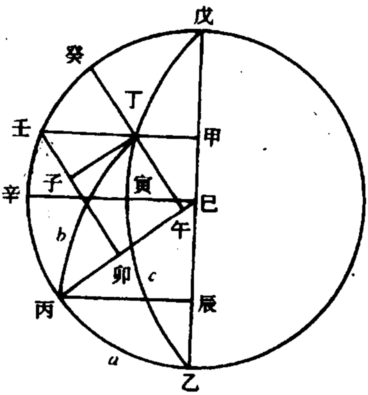



图 2.2.22

$$\frac{1}{\sin c}=\frac{\text{vers }B}{丁壬}。$$

(2)求第二比例式。⑤从丙向巳心作半径。⑥从壬作壬卯垂直于丙巳，为壬丙较弧之正弦。又从丁作癸丁午线垂直于丙巳，为丁丙对弧之正弦(丁丙与癸丙等)。因两正弦平行，又同抵巳丙半径，为十字正方角(直角)，故比例生焉。此立算之根本。⑦又从丁作丁子线与午卯平行而等，成壬丁子勾股形。又从丙作丙辰，为乙丙小

边之正弦，成巳丙辰勾股形。⑧此大小两勾股形相似，故一率半径丙巳，二率小弧正弦辰丙，三率先得数壬丁，四率两矢较丁子。即

$$\frac{1}{\sin a}=\frac{\text{壬丁}}{\operatorname{vers} b-\operatorname{vers}(c-a)}。$$

(3)④⑧两式对应项相乘，得

$$\frac{1}{\sin a\cdot\sin c}=\frac{\operatorname{vers} B}{\operatorname{vers} b-\operatorname{vers}(c-a)}。$$

用余弦代正割，得

$$\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos B。$$

4. 梅文鼎的正形在数学史上的地位

转化思想在数学上是非常重要的，它能够化难为易，化复杂为简单，特别是能化新问题为旧问题，从而和已有知识发生联系，使新问题在扎实的基础上得到解决。

转化思想在中国数学史上源远流长。刘徽就曾试图把球体积的计算转化为"牟合方盖"的计算，虽未成功，却为后人提供了正确思路，南朝祖暅之在此基础上圆满解决了球体积问题。宋元时代，转化思想有更多的运用。李冶曾在《益古演段》中将多元问题转化为一元问题；王恂把研究球面问题转化为研究平面问题；朱世杰在《四元玉鉴》中将无理方程化为有理方程，将多元方程化为一元方程，都是运用转化思想的成功范例。

梅文鼎将球面三角问题转化为平面三角问题，这种思想是对中国传统数学中转化思想的继承和发展，也是对世界数学的一项贡献。球面三角问题如在球面上解决，比较烦琐，梅文鼎把球面三角形转化为平面上的"正形"来研究，比直接研究球面三角形方便得多。这种投影方法的提出在世界上是第一次，只因当时中西文化交流不多，该法没有及时传到西方。

梅文鼎对画法几何的研究，将在本卷第四编第二章论述。

# 第三章　与梅文鼎同时代的几位数学家及其成就

梅文鼎是我国历史上最高寿(89 岁)的数学家之一，而当时研究数学的人也多，因此与他同时代的亦复不少。但又因章节的安排，有些稍早的放在本编第一章，有的(如陈厚耀)因有特殊情况则放到第四编。本章所讨论的人物中，有的与梅文鼎有某种关系，如魏荔彤、杨定三祖孙、孔林宗，而另外的张潮、杜知耕和陈世仁等则与梅文鼎很少或根本无关系。

## 第一节　魏荔彤与杨作枚

魏荔彤这个名字，人们并不陌生，因为他编辑和出版了《梅氏历算全书》，只要研究这部书就不可避免地涉及出版者魏荔彤。

魏荔彤，字念庭，柏乡(今河北省柏乡县)人，不知生卒年。曾在南京等地做官。他对出版梅文鼎著作非常热心，在梅氏去世前就当面提出过这个问题，愿意出资刊印，但未能进行，后来才着手。他认为："勿庵先生当代鸿儒，学醇品粹，年弥高而德弥邵，道益隆，而量益虚，实得理正传，更精研于历算。"有一段描写出版经过的文字很有价值：

"先生冲雅高洁，迄以儒素终身大业，藏山不轻问世，而人争传之。余获接见憾晚，适婴尘务，不能执经请益。岁在戊戌，偶摄法司，因与诸同人设馆白下[1]，延致先生，订正所著，欲共输资刊行。先生

① "白下"，南京的别称。

既以宁淡为志，不乐与俗吏久处，而世会迁变，云散蓬飞，竟未卒事。阅二载，僻居海中，官斋阒寂，复驰函徵求存稿，得十余种。虽屡为雅慕高贤者录刻，然杂遝参错，未成善本；笥中尚伙。又在耄年静摄，不能遽自校定，因嘉许殷恳期为检发。不意哲人遂委矣！……于是复向翰编玉汝[①] 昆季構得未刊将二十种，俱以付梓。工未得完，余亦斥废，更于忧患中竭蹶，岁余方竣。”

这话说于雍正癸卯(1723年)[②]，是梅文鼎去世后的第三个年头。这就是《梅氏历算全书》的初刊本，梅瑴成后来说到“校阅助刻姓氏”时有魏荔彤，注称：“校刊《历算全书》于兼济堂，有序。”[③]即最初的校刊在魏荔彤的兼济堂进行。

由上述情况可见，魏荔彤为出版《梅氏历算全书》一事是主动承担的，出资出力，在很短的时间内完成了这样大部头著作的出版，其贡献应当肯定。在历史上，南宋的鲍浣之、元代的赵元镇等都在出版数学著作方面立下了功劳。

魏荔彤从梅瑴成兄弟那里得到的书稿内“已成书而待刊者十之四，稿略具而未成书者十之六”，这十之六的未成稿不进行校订甚至不补充无法出版。又要全部出版，因而必须聘请合适的天算家负责校订才行。魏荔彤选中了与梅文鼎有一定关系的天算学家杨作枚，他记载了这件事：

“因延锡山杨君学山(作枚)至署，为之订补、疏剔：义之未明者阐之，图之未备者增之，文之缺略者补之，务使有伦有要，首尾贯通。既以勿庵所著为宗，而复有发明、修饰之功，庶读者不烦言而解，期于不负勿庵相托之心，而学山好古勤求之志，亦可

① “玉汝”，即梅瑴成。

② 魏荔彤．梅氏历算全书·序

③ 梅瑴成．梅氏丛书辑要·卷前

嘉尚矣。”①

从这里可以知道，杨作枚主要做了两件事，其一是校订，疏通文字，使首尾贯通，且以“勿庵所著为宗”，即要遵循梅文鼎的思想和方向；其二是他认为某些书稿本身不够完整，于是给予补写，主要有两部分，即《割圆八线之根》1卷和《勾股阐微》之第一卷。

杨作枚，字学山，无锡人。初受家学于其祖国钧，国钧字定三，著《历法大成》10卷。他尝从梅文鼎游，后入算学馆，掌馆事者即梅文鼎之孙梅珏成，“欲官之，遽卒”②。杨作枚的著作有多少，记载不一，有的记为11种，即《本朝国史历志》11卷、《火星论》1卷、《几何补编》1卷、《星学真源》1卷、《律志稿》2卷、《勾股论》2卷、《几何增解》1卷、《补王寅旭野历》4卷、《方程图解》1卷、《溯源星海》8卷、《三角会编》4卷③。梅文鼎曾为《锡山历算书》作跋，跋称：“《锡山历算书》者，友人鲍燕诒、杨学山之所作，而学山之祖定三为之裁定者也。其书有步日月五星之法，有说有图，以推明步算之理。”认为杨作枚与薛凤祚、王锡阐相比是“青出于蓝”。所说的鲍燕诒即鲍祖述，也精通西法。《锡山历算书》是康熙庚寅(1710年)梅文鼎去游吴门(今江苏省苏州)和杨作枚等又去陈厚耀处见到的，书为5册，包括《溯源星海》2卷、《王寅旭野历图注》3卷、《三角法》1卷④。

杨作枚的著作到底有几种，目前难定，后来都失传了。可是后人不断有引用其著作的，光绪时温葆深说：“无锡杨学山刻七论，备载图式”，“杨学山氏著《七论》成卷，专言西儒命术，至详

① 魏荔彤. 梅氏历算全书・凡例

② 见光绪《无锡金匮县志》卷二十六・艺术。

③ 见光绪《吴锡金匮县志》卷二十九。

④ 梅文鼎. 绩学堂文抄卷五・锡山友人历算书跋

尽。”①

杨作枚的个人著作，虽已失传，但补充在《梅氏历算全书》中的“发明”却随该书的流传而保留下来，由此也可知杨作枚数学成就之一二。

《梅氏历算全书》中的《勾股阐微》有小注称：“首卷系杨作枚补，二卷后则勿庵之书。”署名“锡山杨作枚学山著、同邑鲍祖述燕翼参”。实际上是以杨作枚为主，鲍祖述参加合作的。此卷有专名《勾股正义》，主要是讨论勾股及其和差与和差的和差，从中已知二条求勾股弦的问题，也涉及容圆及斜三角形等问题。他对勾股弦的相求问题，总结出 144 种情形，其中有 15 种给出了解法。有的给出二三种，还有的“附”另外之法。现举几例。

**例 1** 已知矩形面积为 $S$ 和长宽和 $b+a$，求 $a$，$b$。

**解**：如图 2.3.1，甲乙午丙为已知矩形，其面积为 $S$，其甲乙($b$)和甲丙($a$)为两直角边，且 $b+a$ 为已知。乙丙连线分为两个勾股形，其一即甲乙丙。再用此矩形合成一个大正方形(中空)，大正方形丙子的面积为 $(a+b)^2$，其周围的 4 个矩形的面积为已知，即 $4ab$，于是中空部分的面积为 $(b-a)^2$，这样

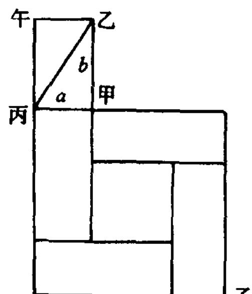


图 2.3.1

$$(a+b)^2-4S=(a-b)^2。$$

开平方，得 $b-a$。而 $[(b-a)+(b+a)]\div 2=b$。

**例 2** 已知弦 $c$ 和勾股较 $b-a$，求 $a$，$b$。

**解**：如图 2.3.2，甲乙丙为勾股形，甲丁为以弦甲丙($c$)为边所成之正方形，己子为勾股较($b-a$)，而己丑是以 $b-a$ 为边之正方形，两正方形相减，即 $c^2-(b-a)^2$，余下的为壬、辛、午、未

① 温葆深. 春树斋丛说

四形，半之，余午、未二形。但午形与戊形全等，所以可考虑未、戊二形，而未、戊二形为"勾股矩内形"。这就有了己子较$(b-a)$，便归结为上一问题了。

关于斜三角形的情形，不论是钝角或是锐角，杨作枚都变成两个勾股形进行研究。其中包括下面的公式

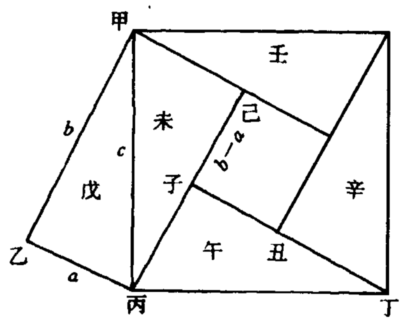



图 2.3.2

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad \left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)。$$

《解八线割圆之根》是杨作枚的重要著作。通观全部内容和署名可略知，原先梅文鼎应有初步的片断草稿，杨作枚在此基础上进行系统整理和大量补充，最后得到完善。但梅瑴成认为不是他祖父的遗稿，因而在改编《梅氏历算全书》时全部删除。由此，本大系将这部分工作归于杨作枚。

《解割圆八线之根》的基本思想是造八线表(三角函数表)的出发点("根")，特别是正弦表，因为它最后转化为求圆内接正多边形一边的问题。"割圆八线"之称就是这么来的。书中说："第割圆八线表，虽久传于世，而立法之根，未得专书剖析，《大测》中如十边五边形之理，皆缺焉。"于是补充缺略："大圆中只有径线，无边、角可寻，乃作者凭空结撰，求得七弧之通弦，而全割圆线，即从此推出，又绝无假借纽合之病。割圆之巧，孰有加于是焉?"

全书给出"表根"7种，"表法"7种，最后还有"求切线割线矢线"一项，附"求割线省法"，小注说："用加减算"。

表根7种，即圆内接正六、四、十、五、三、十五、九边形。其中圆内接正六、四、三边形早已解决，而正五和正十五边形在

《几何原本》第4卷中都有具体作法[①]。正十边形作图法在《几何原本》中没有正面给出，仅在第13卷第9问中涉及。该问的内容是："如果将同圆内接正六边形一边与内接正十边形一边加在一起，则可将此和分成中外比，且它的大线段是正六边形一边。"看来，欧几里得熟知正十边形，可能是由于他已经解决了正五边形的作图，便极容易由此得到正十边形而不需讨论罢了。正九边形比较特殊，因为它是不能用尺规作出的，《几何原本》中也没有。下面对杨作枚关于正十边形和正九边形的作图法予以讨论。为叙述方便起见，把原图上的汉字改为拉丁字母。

表根三：圆内作十等边切形，用理分中末线求三十六度之弦。

理分中末线的作法，在《几何原本》和梅文鼎著作中都有，下面简单介绍一下杨作枚的作法。杨作枚的目的是通过理分中末线求得正十边形的一边，具体说就是把圆的直径理分中末比。

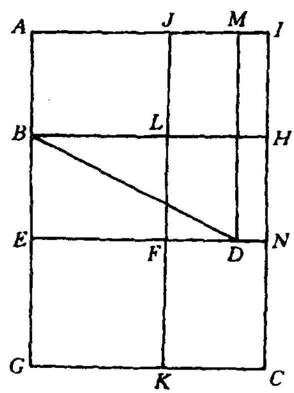



图 2.3.3

如图2.3.3，取一线段$AE$，$B$为其中点。以$AE$为边作一正方形$AEDM$，再从$B$作平行于$AM$的直线$BL$。$B$，$D$连线。将$AE$延长至$G$，使$BG=BD$。再以$BG$为边作正方形$BGCH$，又取$GK=EG$，作$KJ \parallel AG$，$KJ$与$ED$交于$F$。则$F$把$ED$分为两部分：$EF$为$ED$之"大分"，$FD$为$ED$之"小分"，容易推得$EF^2=ED \cdot FD$，也就是$F$把$ED$"理分"为中末线。

① 欧几里得．几何原本．兰纪正，朱恩宽译．西安：陕西科学技术出版社，1990．119～120；126～127

杨作枚认为“理分中末线法，实从此图之理推出，其关键全在乙庚、乙丁二线等也。”乙庚、乙丁即 $BG$，$BD$ 二线。

在此基础上，杨作枚论证了“理分中末线大分，为三十六度之通弦”。其论证如下：

如图 2.3.4①，因$\triangle AOB$ 为等腰三角形，故$\angle A=\angle B$。假定$\angle AOB=36°$，则$\angle A=\angle B=2\angle AOB=72°$。在 $OA$ 上取一点 $C$，使 $BC=AB$，而$\triangle CBA\backsim\triangle AOB$，于是$\angle A=\angle ACB=2\angle ABC$。这就有 $AB=CB=OC$。但是$\angle AOB+\angle OAB+\angle OBA=2d$（二直角）。又因为$\angle A$，$\angle B$ 都是$\angle AOC$ 的 2 倍，于是有“五分两直角”，“该五分两直角之一，三十六度”，和“十分四直角［全圆］之一等”。

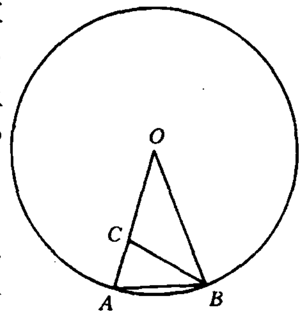


图 2.3.4

有了这个结果，求圆内接正十边形之一边只要求出半径 $OA$（或 $OB$）的“大分” $OC$ 就可以了。

在证明最末，杨作枚说：“十边形之理，据《历书》见《几何》十三卷九题，而《几何》六卷已后之书，未经翻译，不可得见，考之他书亦未有发明其义者，余特作此解之。”由此可知，上述论证系杨作枚独立提出的。

表根七：圜内作九等边内切形，求四十度之通弦。注称“新增”。

如图 2.3.5，以 $O$ 为心作一圆，再作其内接正三角形，三顶点 $A$，$B$，$C$ 把圆周三等分。过 $A$ 作 $AD=OA$ 且 $AD\perp AC$。再以 $A$

① 书上原图，十边形全画出，本图中删去了不用的部分。

为心，$AD$ 为半径作弧与圆交于点 $E$，$\overset{\frown}{DE}$ 为全圆的$\frac{1}{6}$，相当于 60°。又于 $\overset{\frown}{DE}$ 上取点 $F$，连 $OF$，与 $AC$ 交于点 $G$，使 $FG=OA$。以 $F$ 为心，以 $FG$ 为半径画弧 $\overset{\frown}{AGH}$，$H$ 在原来的圆上，得弧 $\overset{\frown}{AH}$，为 $\overset{\frown}{AC}$ 的$\frac{2}{3}$，$\overset{\frown}{HC}$ 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的$\frac{1}{3}$，即全圆的$\frac{1}{9}$。杨作枚认为，线段 $HC$ 即为圆内接正九边形之一边。

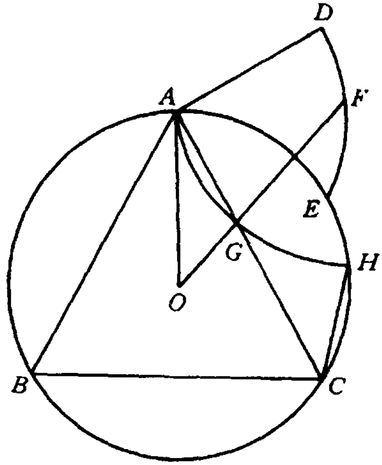


图 2.3.5

作完之后，还有“证明”。实际上，杨作枚的作法中，点 $F$ 的取得违反了尺规作图的规则，因为是移动直尺画出的。但这是中国数学史上出现的尺规作图不能问题。不过杨作枚未指出。

杨作枚说：

“用上根数，于大圆中，求七弧之通弦，以为造端之始，而各度之弦，尚无从可得，爰立六种公法，或折半，或加倍，或相总，或相较，转辗推求，以得象限内各度之正弦。”

这话是说仅有“根”不行，因为 7 种根只涉及 24°，36°，40°，60°，72°，90°和 120°，而且仅因此得到正弦。其他的角或弧，要经过折半或加倍等方法求出其他角度的正弦。下面将表法列出：

表法一：有一弧之正弦，求其余弦，及半本弧之正弦与余弦。

表法二：有一弧之正余弦，求其倍本弧之正弦与余弦。

表法三：求象限内六十度左右距等弧之正弦。

表法四：任设两弧之正余弦，求两弧并及较弧折半之正弦。

表法五：有一弧之正弦，求倍本弧之矢，因得余弦。

表法六：任设不齐之两弧，求两弧相并之正弦，及相较之正弦。

表法七：圆内有五通弦，错互成四不等边形，求不知一弧之通弦。

上面的 7 种“表法”大都容易理解，也容易用现代形式表达出来，但最后一个需略加解释。

在图 2.3.6 中，$AD$ 为圆的直径，$ABCD$ 为圆内接的任意四边形，其中 $AB$，$AC$，$BC$，$BD$ 和 $CD$ 为“五通弦”。对于四边形 $ABCD$，据书中的叙述有

$$AC \cdot BD - CD \cdot AB = AD \cdot BC,$$

或

$$CD \cdot AB + AD \cdot BC = AC \cdot BD。$$

这就是有名的“托勒致定理”。

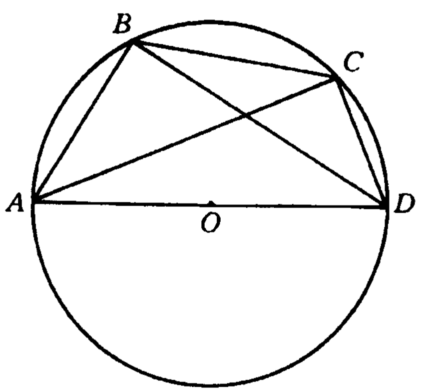



图 2.3.6

设“五通弦”为 $AB$，$CD$，$AD$，$BD$，$AC$，由上述定理可求

得 $\overset{\frown}{BC}$ 之通弦 $BC$。

实际上，古代托勒玫即用此定理造正弦表[①]。

最后有一段总结性的话，大意是说用上面的 7 种表法，不仅可得各度之正弦，而且细推之，也能得度以下各分之正弦。只要计算出一象限内的正弦值就可以了。

以上所论以正弦为主，之外还有切线、割线、矢线，书中接着论证了它们的造表问题。

另外，杨作枚还有些其他工作，因与孔林宗有关，放在下节结合孔林宗的工作一起讨论。

## 第二节　孔林宗及其数学成就

孔林宗，名兴泰，字逸房，后改为林宗，河南杞县人，生卒年月不详。他是梅文鼎学派的主要成员，活动在康熙年间。孔林宗出身于杞县名门世家，其父孔衍禵，字燕贻，幼年好学，博通经史，顺治甲午年(1654 年)领乡试中举人，荐为河南汝州学正，康熙辛亥年(1671 年)补信阳州课，晚年回归故里，仍手不释卷，著有《汇雅文枥厍文辨体十则》一书[②]。孔林宗自幼受到家庭中良好学风的薰陶，聪颖异常，才华出众。康熙十一年(1671 年)参加河南省学政主持的院试，名列通许县榜首，被保送入京师国子监读书。他勤奋学习，刻苦钻研，成绩优异，通过朝考后授河南辉县教谕，康熙丁卯年(1687 年)乡试中第，获举人出身资格[③]。

1689 年，梅文鼎奉明史馆之邀，赴京师纂修《明史・历志》，孔林宗经明史局总裁、其父同窗好友汤斌介绍与梅文鼎相识。由

---

① 详见本大系副卷一“托勒玫的工作”。

② 孔衍禵传. 见：杞县志. 乾隆五十三年(1788 年)版. 卷十三

③ 见《杞县志・卷十》；又见《通许县志・卷七》，乾隆三十六年(1771 年)版。

于二人志同道合，很快便成为密友，从此，孔林宗成为梅氏学派的主要成员[①]。由于孔林宗的著作已经散佚，所以孔梅之间的交往只能从梅文鼎及其他人书中推知。1690 年，孔与梅在刻印梅的《方程论》之前进行研讨，“又得中州孔林宗学博，杜端甫孝廉，钱塘袁惠子文学共相质正，乃重加缮录，认为定本”[②]。1692 年，孔与梅就“切线分角之法”中的问题一起进行反复推敲论证，“而征之切线分角之法，以著其理。袁子虚怀见从，已复质诸睢州友人孔林宗兴泰，亦以为然，而手抄以去”[③]。1693 年后，梅文鼎回到宣城故里，从此之后，孔梅之间可能主要以书信来往，交流学术研究成果。1702 年，梅文鼎撰《勿庵历算书目》，在《正弦简法补》1 卷中写道：“近见孔林宗《大测精义》求半弧正弦法，与余说不谋而合，可谓所见略同矣。”这里提到的《大测精义》一书可能是孔寄给梅的手稿或刊印本。杨作枚在为《梅氏历算全书》所补作的《解八线割圆之根》一书中，两次谈到孔林宗的工作，为孔的求 72 度通弦和正弦简法作图，以著其理[④]。这表明杨作枚对孔林宗非常了解和敬重。

孔林宗治学严谨，一丝不苟。西洋传入的数学天文学知识有许多只述其术不著其理，他对这些问题总要追根溯源，给出论证。他对《大测》一书中求 72 度通弦作法的理论证明就是一例。通过梅文鼎与孔林宗“切线分角之法”的讨论，可看出孔林宗具有较高的科研能力和学术水平，同时他也具有虚心好学、取人之长补己之短的良好美德。

从目前所掌握的资料看，孔林宗的主要著作只有《大测精

---

① 高宏林. 梅文鼎学派的主要成员孔林宗. 中国科技史料，1996，17(4)：24～28

② 梅文鼎. 方程论·发凡. 见：梅氏历算全书

③ 梅文鼎. 勿庵历算书目·火炜本法图说. 见：梅氏历算全书

④ 杨作枚. 解八线割圆之根. 见：梅氏历算全书

义》一书，但该书已经散佚，根据梅文鼎在《勿庵历算书目》中谈到“近见《大测精义》”等内容可看出该书大致写于1693年到1702年之间，主要研究邓玉函编译的《大测》和徐光启、罗雅谷等合撰的《测量全义》的内容，并根据理论和实践需要进行精简取舍，给予深入的探讨。

孔林宗留下的文字很少，只是在《梅氏历算全书》中有一部分涉及孔林宗，很可能这也是他成果中的精华，从这一小部分资料进行分析，孔林宗的主要数学成果是正多面体和三角函数等方面的研究①。

首先，孔林宗独立研究了5种半正多面体及其一些性质。

梅文鼎在《几何补编》中论述了正多面体和半正多面体的性质与计算方法，孔林宗在梅文鼎研究成果的基础上进一步探讨，其成果附在该书卷四之后。附记全文是：

“方灯可名为二十四等边体。圆灯可名为六十等边体。

“四等面体又可变为十八等边体，为六边之面四，为三边之面四，凡十二角；又可变为二十四等面体，面皆三边，凸边二十四，凹边十二，十字之交六，凡八角如蒺藜形；六等面体又可变为三十六等边体，为八边之面六，为三边之面八，凡二十四角；八等面体亦可变为三十六等边体，为六边之面八，为四边之面六，凡二十四角；又可变为四十八等边体，为四边之面十八，为三边之面八，凡二十四角。”

从这段附记来看，孔林宗的主要工作有：

(1)提出四种半正多面体及其作法。这四种多面体是：由正四面体变成的正十八边体，具有4个六边形的面和4个正三角形的面，12个顶点；由正六面体变成的正三十六边体，具有6个正八

① 高宏林．略论孔林宗的数学成就．见：数学史研究文集(第五辑)．呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993．58～63

边形，8 个正三角形和 24 个顶点；由正八面体变成的正三十六边体，具有 8 个正六边形，6 个正四边形和 24 个顶点；由正八面体变成的正四十八边体，具有 18 个正四边形，8 个正三角形和 24 个顶点。

半正多面体亦称为阿基米德体，在古希腊，柏拉图也曾研究过半正多面体，阿基米德发现了 13 种半正多面体。若用 $m_\alpha$，$n_\beta$，…分别表示这种多面体有 $m$ 个正 $\alpha$ 边形，$n$ 个正 $\beta$ 边形……那么阿基米德发现的这 13 种多面体分别为：$A_1(4_3,4_6)$，$A_2(8_3,6_4)$，$A_3(6_4,8_6)$，$A_4(8_3,6_8)$，$A_5(8_3,18_4)$，$A_6(12_4,8_6,6_8)$，$A_7(20_3,12_5)$，$A_8(12_5,20_6)$，$A_9(20_3,12_{10})$，$A_{10}(32_3,6_4)$，$A_{11}(20_3,30_4,12_5)$，$A_{12}(30_4,20_6,12_{10})$，$A_{13}(80_3,12_5)$。[①] 显然，孔林宗所研究的半正多面体正是阿基米德 13 种中的 4 种，即 $A_1(4_3,4_6)$，$A_4(8_3,6_8)$，$A_3(6_4,8_6)$ 和 $A_5(8_3,18_4)$，另外，梅文鼎也研究了 $A_2(8_3,6_4)$和 $A_7(20_3,12_5)$，这 6 种半正多面体是清代学者独立研究的。

（2）提出一种新的星形体（图 2.3.7）及其作法。这种图形是由正四面体所变成的正二十四面体，每个面都是正三角形，24 个凸边和 12 个凹边，其中凸边相交成 6 对互相垂直且平分的线段，8 个顶点，外形像蒺藜。研究起来非常麻烦，即使现代拓扑学中的闭多面体也把它排除在外，孔林宗对它的提出和研究实属海内外独步。

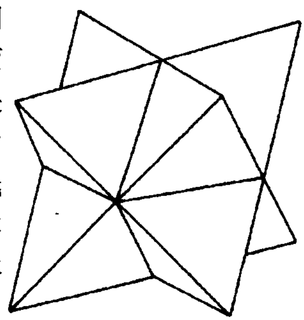


图 2.3.7

（3）已涉及多面体的非度量性质。附记中有“方灯可名为二十四等边体，圆灯可名为六十等边体”。这是对梅文鼎两个命题中多面体名称的补充说明。因梅氏已给出两种多面体的面数、顶点数

① 详见本大系副卷一。

和棱数的性质。可以说，孔林宗实际上完成了下面一个表(表 2.3.1)：

表 2.3.1

| 多面体 | 边数 | 面数 | 顶点数 |
|---|---|---|---|
| $A_1(4_3,4_6)$ | 18 | 4+4=8 | 12 |
| $A_2(8_3,6_4)$ | 24 | 6+8=14 | 12 |
| $A_3(6_4,8_6)$ | 36 | 6+8=14 | 24 |
| $A_4(8_3,6_3)$ | 36 | 6+8=14 | 24 |
| $A_5(8_3,18_4)$ | 48 | 8+18=26 | 24 |
| $A_7(20_3,12_5)$ | 60 | 20+12=32 | 30 |

表中数据关系属于多面体连续变形下的不变性质，即拓扑性质，这些数据关系完全符合欧拉多面体公式，即不论什么形状的凸多面体，其顶点数 $V$、棱数 $E$、面数 $F$ 之间总有 $V-E+F=2$ 这个关系。但遗憾的是孔林宗并未发现欧拉多面体公式。

其次，发现了平面三角学中的半角正弦公式。

《大测》一书中三要法之一，半角公式为 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2}$，显然该半角正弦公式使用起来比较麻烦，孔林宗注意了这个问题，经过深入研究，探求出求半角正弦的公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}。\qquad (*)$$

梅文鼎也曾注意到这个问题，并把求(*)式的方法称为正弦简法，但孔林宗和梅文鼎的证明方法都未保存下来，只是杨作枚在《解八线割圆之根》一书“表法五：有一弧之正弦，求倍本弧之矢，因得余弦”中给出一种证明方法，且在证明之后说：“此孔林宗术，

勿庵称为正弦简法，余作此图，以著其理。”这说明此证明乃孔林宗和梅文鼎各自独立发现半角正弦公式，梅文鼎又说：“近见孔林宗《大测精义》求半弧正弦法与余说不谋而合。”[①]因此，杨作枚的证明脉络基本符合孔林宗的证明框架。其证法大致情况如下：

如图 2.3.8 所示，$\angle EAB$ 为所给角 $\alpha$，设半径 $AE$＝单位 1，$BC=BE$，$\sin\alpha=BD$，$\sin 2\alpha=CF$，$1-\cos\alpha=EF$，作矩形 $CEGL$，使 $EG=EH=\frac{1}{2}CE$，因为直角$\triangle AHE$ 与$\triangle ADB$ 合同，所以 $BD=HE$. 又 $\mathrm{Rt}\triangle ECF\backsim\mathrm{Rt}\triangle EAH$，可得$\frac{AE}{HE}=\frac{CE}{EF}$，即

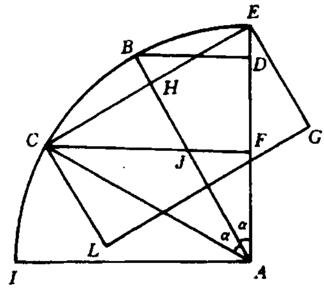



图 2.3.8

$AE\cdot EF=2\sin^2\alpha$(由图中矩形面积可看出)。“而全数(半径 $AE$ 为单位 1)又省一除，故以乙丁(即图中 $BD$)正弦(即辛戊，也就是现图中 $EH$)自乘，倍之退位(意思为不用乘单位 1)即得戊己($EF$)倍弧矢，用减半径得倍弧余弦甲乙($AF$)也”，即得出公式：$\cos^2 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$。“若反之，以戊己($EF$)矢折半，进位(意思为乘以单位 1 的半径 $AE$)开方得本半弦之正弦(丁乙，即 $BD$)。”也就是说，若用 $\alpha$ 表示$\angle CAE$，可得半角正弦公式(＊)。

1723 年，《数理精蕴》出版，书中对“六宗率”和“三要法”又重加讨论，其中要法三改成公式(＊)，该书的编纂过程中很可能吸收了孔林宗的这一研究成果。

再次，阐述《大测》中 72 度通弦作法的理论根据。

《大测》的“宗率五”就是求 72 度之通弦，其作法是利用命题“六边、十边两方并等五边上方形”即圆内接正六边形边长平

① 梅文鼎. 勿庵历算书目·正弦简法补

方与正十边形边长平方之和等于正五边形边长平方。这里正五边形边长就是 72 度之通弦。通过这一命题的公式便可计算出正五边形的边长，但书中没有谈到该公式的来源。孔林宗研究过这个问题，但论文原题已经失传，然而在杨作枚的《解八线割圆之根》一书中也研究了这一命题的证明，同时杨作枚还指出："求七十二度通弦法取经甚奇，《大测》止具算术而未著其理。薛书及孔林宗说殊多牵附余图，与原算吻合，乃知古人立法之简奥也。"据此可知孔林宗研究过这个问题，且孔的论证精神实质上与杨作枚的思路相差无几。杨的证明大致如下：

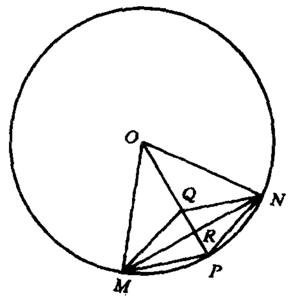



图 2.3.9

如图 2.3.9 所示，$OM$，$ON$，$OP$ 为圆 $O$ 的半径，$MN$ 为圆内接正五边形边长，$MP$，$NP$ 为其正十边形边长。在 $OP$ 上截 $OQ=MP$，易知四边形 $MPNQ$ 为菱形，显然 $QP$ 为黄金分割半径的较小部分。由菱形性质和勾股定理知，在直角$\triangle MPR$ 中有 $\left(\frac{1}{2}MN\right)^2=MP^2-\left(\frac{1}{2}QP\right)^2$，即

$$MN^2=4MP^2-PQ^2。\qquad ①$$

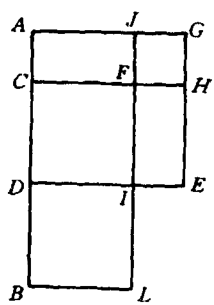



图 2.3.10

如图 2.3.10 所示，$AD=OM$，$DB=MP$，$CD=DB$，$AC=PQ$，矩形 $ADEG=AD^2$，矩形 $DBLI=DB^2$。因为罄折形 $ABLIEG=$ 矩形 $ADEG+$ 矩形 $DBLI=AD^2+DB^2=OM^2+MP^2$，又 $AD\cdot AC=CD^2$（黄金分割定义），所以矩形 $ACHG=AC\cdot AG=AD\cdot AC=CD^2=DB^2$。同理，矩形 $JIEG=DB^2$，故罄折形 $ABLIEG=$

$4DB^2-AC^2=4MP^2-QP^2$。因此有等式

$$OM^2+MP^2=4MP^2-QP^2。 \quad ②$$

由①②可得　$MN^2=OM^2+MP^2$。

最后，在“切线分角之法”和方程论方面的研究。

梅文鼎在《火星本法图说》中记录了他求解火星次均(即求岁轮上视差角)时获得的一个简便方法——切线分角之法，并就此问题同孔林宗进行过讨论研究。梅氏的方法是：

如图 2.3.11 所示，$\angle AOB=\beta$，$OA=m$，$OB=n(m>n)$，求$\angle A$。

解法是先作$\angle AOB$的外角平分线$OD$，过$O$作$OM\parallel AB$，则$\angle COM=\angle A$，令$\angle MOD=\alpha$，再用公式

$$(m+n)\tan\alpha=(m-n)\tan\frac{1}{2}(180°-\beta)$$

求$\alpha$，最后利用$\angle A=\frac{1}{2}(180°-\beta)-\alpha$求出$\angle A$。

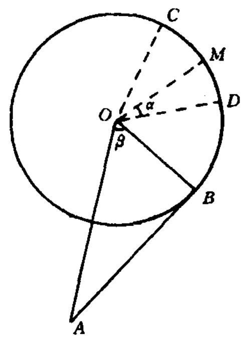



图 2.3.11

梅氏利用勾股术给出证明后指出，他曾将此法“复质诸睢州友人孔林宗，亦以为然”，可见孔林宗对此证法也进行过反复的推证。

孔林宗的研究工作受到清朝学者的高度重视与评价。杨作枚在《勿庵历算全书》凡例中指出：“历算之学勿庵尚矣。然我朝声教洋溢，人文蔚起，博学多识之彦，比屋接庶。如吴江王晓庵、青州薛仪甫、睢州孔林宗、桐城方位伯、锡山杨定三、鲍燕翼诸君子深明历算。各有著述。”并多次运用孔林宗的工作与梅文鼎的工作相印证。所以，对孔林宗的数学研究成果及他在这一时期数学发展史上的地位应当给予正确的评价。但只因其著作已经散佚，故还不能对其数学研究成果予以全面的评述。

## 第三节 张潮的纵横图

张潮(1650～?)，字山来，一字心斋，安徽新安(今歙县)人，以岁贡官翰林孔目。他并不是专门研究数学的，但是，在业余时间很爱钻研数字的组合规律，特别对我国古代纵横图的研究，有独到之处。他著有一本书叫《心斋杂俎》，其中卷下有一篇“算法图补”专论纵横图。此文篇幅不大，仅17页，共介绍24个图。下面挑选一部分予以介绍。

### 一、“算法图补”内容介绍

“算法图补”中有一段文字，称：

“《算法统宗》所载十有四图，纵横斜正，无不妙合自然，有非人力所能为者。大抵皆从洛书悟而得之。内惟百子图，于隅径不能合，因重加改定，复以意增布杂图，亦皆有自然之妙。乃知人心与数理相为表里，引而伸之，当犹有不尽于此者，姑即其已然者列于后。”

这一段文字很短，但非常明确地说明他写这篇短文的动机是受程大位《算法统宗》中纵横图的影响，从钻研其中“百子图”的“隅径不能合”入手，引而伸之，发现许多图，从而使纵横图的研究又深入一步。

下面列举张潮的24个图中的一些图。

1. 参三图(图2.3.12)

六子作九子用，

三角各十二数，

每面各十二数。

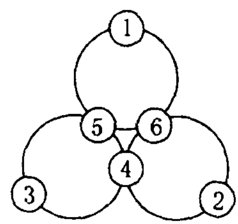


图 2.3.12

2. 参三图(图2.3.13)

六子作九子用，

三角各九数，

每面九数。

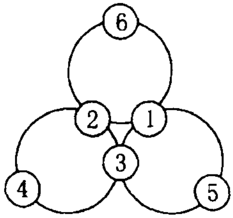



图 2.3.13

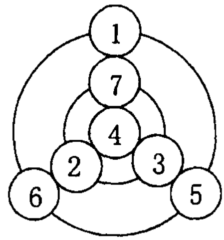



图 2.3.14

3. 参三图(图 2.3.14)
七子作十五子用,
圆、径俱十二数。

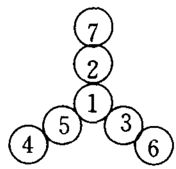



图 2.3.15

4. 参三图(图 2.3.15)
七子作九子用,
三径各十数。
5. 揲四图(图 2.3.16)
十六子作六十四子用,
角径、半径、四方、四尖、
中心俱三十四数。

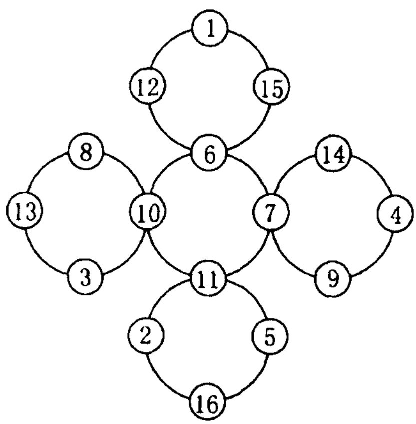



图 2.3.16

6. 伍五图(图 2.3.17)
十七子作二十五子用，
各四十五数。

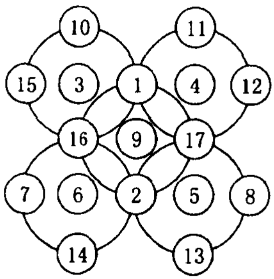



图 2.3.17

7. 伍五图(图 2.3.18)
二十一子作二十五子用，
各五十五数。

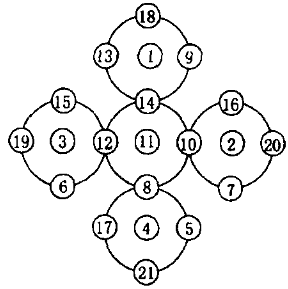



图 2.3.18

8. 伍五图(图 2.3.19)
二十五子作四十五子用，
各百十七数①。

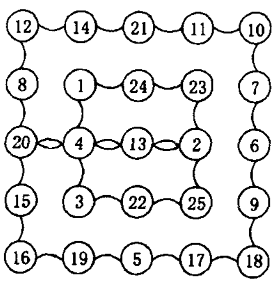



图 2.3.19

9. 方六图(图 2.3.20)
二十子作三十六子用，
各六十三数。

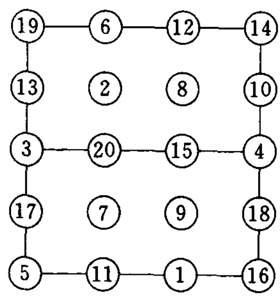



图 2.3.20

---

① 此文按图中所划的线不易理解。实际上，由大正方形四个角及中心各九个数组成的五个正方形，其数字之和均等于 117。

10. 六合图(图 2.3.21)

十八子作七十二子用，

围、径并每方各五十七数。

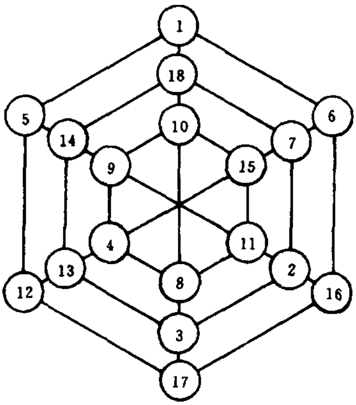



图 2.3.21

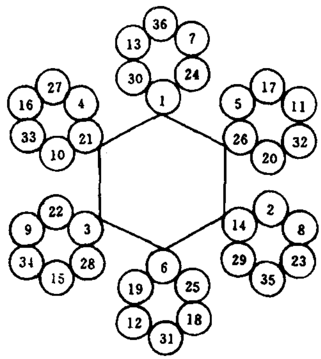



图 2.3.22

11. 更定聚六图(图 2.3.22)

每对三十七数，

每阵百十一数。

12. 七襄图(图 2.3.23)

三十一子作四十九子用，

各百十二数。

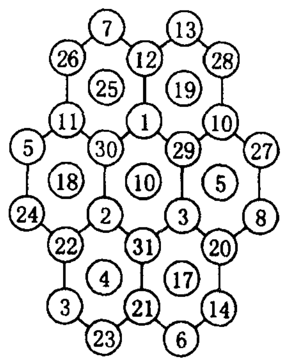



图 2.3.23

13. 八阵图(图 2.3.24)

三十二子作六十四子用，

围、径各一百三十二数。

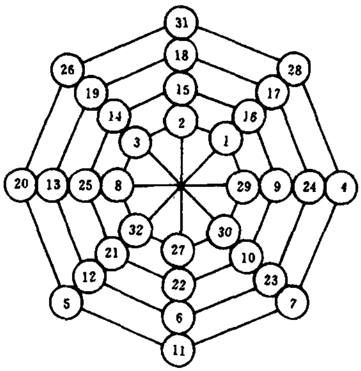



图 2.3.24

14. 八阵图(图 2.3.25)

三十二子作四十子用，

各一百三十二数。

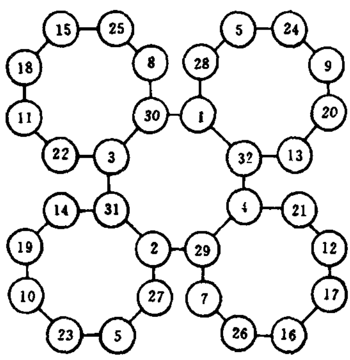



图 2.3.25

15. 九宫图(图 2.3.26)

三十三子作四十五子用，

各八十五数。

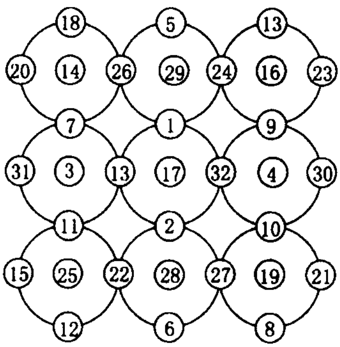



图 2.3.26

16. 九宫图(图 2.3.27)

四十九子作八十一子用，

各二百二十五数[①]。

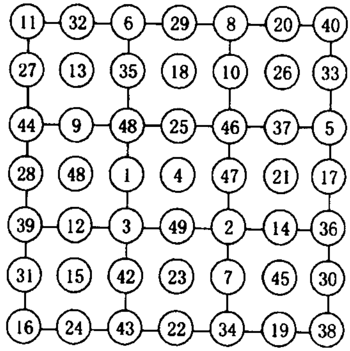



图 2.3.27

17. 更定百子图(图 2.3.28)

纵横斜正各五百零五数，

一百子作二百二十子用。

| 60 | 5 | 96 | 70 | 82 | 19 | 30 | 97 | 4 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 43 | 1 | 74 | 11 | 90 | 54 | 89 | 69 | 8 |
| 46 | 18 | 56 | 29 | 87 | 68 | 21 | 34 | 62 | 84 |
| 32 | 75 | 100 | 47 | 63 | 14 | 53 | 27 | 77 | 17 |
| 22 | 61 | 38 | 39 | 52 | 51 | 57 | 15 | 91 | 79 |
| 31 | 95 | 13 | 64 | 50 | 49 | 67 | 86 | 10 | 40 |
| 83 | 35 | 44 | 45 | 2 | 36 | 71 | 24 | 72 | 93 |
| 16 | 99 | 59 | 23 | 33 | 85 | 9 | 28 | 55 | 98 |
| 73 | 26 | 6 | 94 | 88 | 12 | 65 | 80 | 58 | 3 |
| 76 | 48 | 92 | 20 | 37 | 81 | 78 | 25 | 7 | 41 |

图 2.3.28

① 图中有两个48数，这显然是错的。经计算知，图中第四行与第二列交叉处的48应改为41。

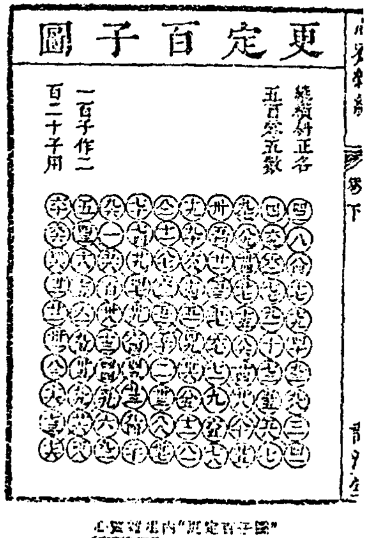



图 2.3.29　“更定百子图”书影

## 二、“算法图补”的结构与图注释意

“算法图补”中的 24 个纵横图是按照自然数的顺序，从“五”到“十”，即“参三”、“揲四”、“伍五”、“六合”（或“方六”、“聚六”）、“七襄”、“八阵”、“九宫”、“百子”（十乘十）排列的，每一种又根据具体情况分为一种或多种图。从名称上看，总共 11 种，它们分别是“参三图”、“揲四图”、“伍五图”、“方六图”、“六合图”、“更定聚六图”、“龟文聚六图”、“七襄图”、“八阵图”、“九宫图”和“更定百子图”。

实际上，按结构来说，这 24 个图可分为四大类，分别称它们为“联合图”（包括前两种“参三图”、“揲四图”、四种“伍五图”、“龟文聚六图”、“七襄图”，一种“八阵图”和两种“九宫图”）、“幻圆”（包括三种“参三图”、“六合图”、两种“八阵图”）、“幻方”（包括“伍

五图"、"六图"、"九宫图"、"更定百子图")，"更定聚六图" 可为独立的一类①。

"联合图"的特点是若干个图形组合在一起，大体上各图形所组成的数字之和相等。例如，"龟文聚六图" 是由 24 个数字所组成的七个正六边形，每个六边形顶点上数字之和均为 75。其它大致相同。

"幻圆"的特点是由前几个自然数所组成的几个同心圆或同心正多边形，每个圈上的数字之和相等，半径上的数之和相等，或者图中周边和径上数之和相等，某些还有一些块块数字之和相等。

"幻方"的特点是由线所指示的方形之边及方形中心数字之和相等，唯 "更定百子图" 比较特殊，纵列、横行及两对角线上数字之和也相等。

"算法图补" 中每一个图都有注释文字，说明本图的特点，大致分为两个层次：一是说明使用的数字个数以及为使数字和相等而重复后的数字个数；二是指出哪些数字之和相等。例如 "龟文聚六图" 的注文是："二十四子作四十二子用，各七十五数。" 前一句话是说，共用前 24 个自然数，实际上要计算 7 个六边形顶点上数字之和，因而，这 24 个数字应当作 6 乘 7，即 42 个数字用。后一句 "各七十五数"，说明这 7 个六边形中，每个多边形顶点上数字之和都相等，均为 75。

### 三、"算法图补" 在历史上的地位与作用

纵横图，现在通常称之为幻方(Magic Squares)，它属于组合分析的范畴。所谓纵横图，"即在各种几何形状的表上排列数字，使得对这些数进行简单的逻辑运算时(例如加法)，不论采取哪一

① 李迪. 中国数学史简编. 沈阳. 辽宁人民出版社，1984. 249～250

条路线，得到的和或积都能完全相同"①。我国古代的"九宫图"就是一种简单的三阶幻方。关于它的计算方法，徐岳在《数术记遗》中就有了记载。他说："九宫算五行，参数犹如循环。" 6 世纪注释者甄鸾解释道："九宫者，即二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。" 这就是世界上最早的三阶幻方②。另外，《易·乾凿度》中有"太乙取其数以行九宫，四正四维，皆合于十五。" 因该书大约为战国时代的作品，因此可以推断，"九宫" 的创作者应在秦朝以前。唐代以后称"九宫" 为"洛书"。至于"纵横图"一词，则由南宋时代的杨辉所首创③。

在杨辉的《续古摘奇算》上卷中记载有纵横图 13 幅，其中"洛书数"、"四四图"、"五五图"、"六六图"、"七七图"、"六十四图"，"九九图"、"百子图" 分别为三、四、五、六、七、八、九、十阶幻方。至于其他一些图，如"聚五图"、"聚六图"、"聚八图"、"攒九图"、"八阵图"、"连环图" 等都是由纵横图演化而来的。杨辉还在该书中叙述某些纵横图的构造方法。例如，"洛书数" 的造法为："九子斜排，上下对易。左右相更，四维挺出。戴九履一，左三右七。二四为肩，六八为足。"《续古摘奇算法》杨辉写的自序称："一日忽有刘碧涧、丘虚谷携诸家算法奇题及旧刊遗忘之文，求成为集，愿助工板刊行，遂添摭诸家奇题与夫缮本及可以续古法草，总为一集，目之曰：《续古摘奇算法》。" 由此可见，虽不能完全肯定纵横图的构造方法为杨辉所创，但足以说明杨辉已对纵横图的构造规律引起注意，并进行概括和总结。从目

① 〔英〕李约瑟. 中国科学技术史·数学(第三卷). 北京：科学出版社，1978. 123

② 〔英〕李约瑟. 中国科学技术史·数学(第三卷). 北京：科学出版社，1978. 134

③ 李俨. 中算史论丛(第一集). 北京：科学出版社出版，1954. 175

前资料看，在此之前，我国历史上还没有这方面的记述[①]。

杨辉之后，我国学者对纵横图的研究不断深入。程大位在其著作《算法统宗》(1592 年)中给出纵横图 14 种。这些图大部分与杨辉的图相同，仅有“五五图”、“六六图”、“聚六图”、“八阵图”四种稍异，“五五图”中也叙述了构造方法。清代学者对纵横图的研究是上升势头。方中通在《数度衍》(1661 年)中载纵横图 14 种，大部分引自程大位《算法统宗》，只有一个“五五图”与程的图稍有不同。

张潮《算法图补》中“更定百子图”是对程大位“百子图”的改进，不仅保证图中纵横各数之和相等，而且还保证两条主对角线上数之和也与纵横各和均相等。其他各图大都是他独立创造的。遗憾的是，书中未涉及各图的构造方法问题。

清代学者保其寿，南通人，受张潮书之影响，对纵横图产生浓厚的兴趣。他不满足于张的平面图，深入钻研，推演出立方及浑圆图 20 个，载其著作《碧奈山房集》内“增补算法浑图”中。

清代后期，多受西洋传入纵横图影响，其研究更深入一步，这里不再赘述。

由此可见，张潮的纵横图在整个纵横图发展史中占有重要地位。李俨曾高度评价他的工作，称“清代张潮纵横图是有相当贡献的。”[②]

## 第四节　杜知耕与《数学钥》

杜知耕是清初数学家，年纪比李子金轻。他的数学著作《数学钥》和《几何论约》均收入《四库全书》中。特别是《数学

---

① 中国数学简史编写组．中国数学简史．济南：山东教育出版社，1986．302

② 李俨．中国数学大纲(下册)．北京：科学出版社，1958．489

钥》一书，对于清朝初年继承并发展传统数学，吸收消化西方传入数学都起了很大作用。本节介绍杜知耕的生平及其重要著作《数学钥》。

## 一、传略与著作

杜知耕，字端甫，号伯瞿，河南柘城人，清初著名数学家，生卒年月不详。杜知耕出生在一个与明清政权有着密切关系的柘城世家，家境殷实，世代书香。知耕曾祖父杜银，以子杜齐芳贵赠文林朗刑科给事中。知耕祖父杜齐芳，字元铧，号云槊，明万历己未(1619年)进士，初授平阳(今山西临汾)推官。由于他约身束下，厘弊剔奸，谕以朝廷，威德边人，所以后升任刑科给事中，上任后不久，由于受宦官魏忠贤陷害，便落职返回故里。崇祯即位后又以特恩拔置刑垣都谏。他秉公执法，慷慨言事，弹劾了当时的宰相阳羡(即温体仁)，阳羡以“莫须有”的罪名将他下狱大理寺。后遇赦重归故里。知耕父亲杜行恕，字无忮，号容居，顺治辛卯年举人。行恕自幼善诗书，聪明好学。然而他不乐仕进，在柘城西边涡河道上辟一精舍，环植垂柳，养蜂种药，其舍题名曰“柳澳”，著有诗集《柳澳初吟》。知耕大弟杜知耪，字实甫，二弟杜知耧，字玉甫，二人都是国学生，他们对数学都有一定的研究。知耕有一子叫杜允璇，对数学也有一定爱好。他对杜知耕著作的整理和出版作出了贡献[①]。杜知耕的家庭条件对他的成长无疑产生很大影响。

知耕虽然出生在书香门第，但幼年却境遇不佳。12岁时父亲行恕下世，两个弟弟年幼，母亲又体弱多病，因此，他从小就挑起繁重的家务担子。知耕是远近闻名的孝友：对父亲“哀毁骨立，苫块三年，祭葬尽礼”[②]；对母亲每日端汤熬药，还“祷天愿以身

① 见《柘城县志》，河南省图书馆藏本。

② 人物·杜知耕．见：柘城县志．卷四

代母卒，泪尽继血，生养死葬”①。知耕童年天资过人，聪颖绝伦。由于受家庭的影响，初上小学时就有远大抱负，立志作一位品德高尚、智慧超人、声誉四方的贤哲。他学风踏实，肯于钻研，一丝不苟，“凡读一书必求实，实有得；凡讲一事，实可行，反之则不好也”。②上学时兴趣广泛，涉猎面广，不仅通晓四书五经，而且还对天文、地理、律吕、历法、声韵、数学和医学等学科都有很深的研究。学习时领悟其理、晓之以用，真正达到融会贯通、得心应手的娴熟程度。20 岁时，他以太学生的身份游京师，这是他一生学术生涯的开端。杜知耕的好友、康熙乙酉年(1705 年)副贡田叔度(字江陂)曾说：“君(杜知耕)游京师，初受知于诸王，留其邸教授数年，又受知于安溪学士。”③安溪学士即李光地，此人在朝廷很有地位，得到他的赏识很重要。可能由李光地的关系，知耕大概是在当时的国子监或钦天监中学习数学或历法，后又留在那里教学。这一时期他第一次见到利玛窦和徐光启合译的欧几里得《几何原本》前 6 卷，潜心研究。这本书已出版 70 多年，但由于它是一部抽象的、演绎式的逻辑体系著作，与中国传统的、以布算为主、程序化和机械化体系的数学大不相同，所以习之者甚寡。李子金谈到当时京城一些学者对待学习《几何原本》的态度时曾说：“京师诸君子，即素所号为通人者，无不望之反走，否则掩卷不谈，或谈之也茫然而不得其解。”④ 而知耕则“寓目辄通，莫不涣然冰释而无所凝滞，一时皆翕然称异，而不知其端甫等闲之事也”⑤。正是由于知耕学识渊博，所以当时许多公卿大夫虚怀请益，学其按脉，学其布算。有的大臣还濡笔而书启事荐为御臣，荐为

---

① 杜知耕传. 见：柘城县志. 卷四

② 李子金. 杜端甫数学钥序. 见：杜知耕. 数学钥. 开封荣兴斋石印本. 河南省图书馆藏本

③ 田叔度. 杜端甫诗集序. 见：柘城县志. 卷八

④⑤ 同②。

算学博士。事成与否虽无资料查找，但足见知耕在当时京师政界和学者中享有一定声望。杜知耕的数学著作《数学钥》6卷(1681年)大概就是在这一时期写成的。由于家庭和社会的影响，知耕热心于功名，寄望于科举。康熙丁卯年(1687年)考中举人。晚年他回归故里仍致力于学术研究。

杜知耕和当时的数学家或其他某些名人都有交往，如李子金、李光地、梅文鼎、孔林宗、吴学颢等，其中李子金可能是他的启蒙老师，李子金的数学研究不能对他没有影响。

杜知耕的主要著作有：《数学钥》6卷，《几何论约》7卷和《杜端甫诗集》。《杜端甫诗集》收录他一生的诗近千首，由他儿子杜允璇在他去世后整理而成。《数学钥》将在下面专门介绍。这里主要谈一下他的数学著作《几何论约》。

《几何论约》成书于1700年，该书是以欧几里得《几何原本》前6卷为蓝本，再删繁就简而写成的。对于《几何原本》一书，徐光启曾指出："此书为用至广，在此时尤为急须"①，"欲公诸人人，令当时亟习焉，而习者盖寡，窃意百年之后必人人习之，即又以习之晚也"②。事实上，从译本出版的1607年到这时已90余年，习之者仍寥寥无几。知耕分析其原因主要是该书冗繁，"盖以每题必先标大纲，继之以解，又继之以论，多者千言，少者亦不下百余言"③，自然读起来困难，"须凝精聚神，手意目顾，方明其义。精神少懈，一题未竟已不知所言何事"④。于是他设想"若一题之蕴数语辄尽，简而能明，约而能该，篇幅既短，精神易括，一目了然如指掌"⑤，学起来就容易得多。《几何论约》就是在这样指导思想支配下，"就其原文……可约者约之，则有可发者以己意附之解，已尽者节其论，题目自明者并，节其解务简省文句期合

①② 徐光启. 几何原本杂议. 1607

③④⑤ 杜知耕. 几何论约自序

题意而止。又推义比类，复缀数条于末，以广余意”[①]而写成。徐光启对《几何原本》的严密体系和演绎推理方法极为赞赏，指出："此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改。有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得。”[②] 似乎《几何论约》的内容与此精神相违背。实际上，随着历史的发展，要使几何学从单纯几个数学家研究的局面达到人人习之的普及地步，必然要有一个对《几何原本》取其精华，根据实际需要删繁就简的过程，现代东西方所使用的教科书就是一个有力的佐证。事实上，此时出现的几种几何著作，如方中通的《几何约》、李子金的《几何易简集》和梅文鼎的《几何摘要》等都是朝着这个方向努力的。四库馆员们对《几何论约》的取舍是肯定的，称“梅文鼎算术造微而所著几何摘要亦有所去取于其间，且称知耕是书是以相证，则是书之删繁举要必非漫然矣。”就某种意义上讲，《几何论约》是《几何原本》在东方向现代教科书形式过渡的一部著作。

在杜知耕的著作中贯穿着“度也算也皆数也，二而一者也”[③]和“画图剖析之，以考验形合布算之数”[④]的形数结合的数学思想与研究方法。杜知耕认识到揭示事物发展运动规律与对形数的认识是相互联系的，利用形数结合的方法才能真正认识事物的本质。正如吴学颢在《几何论约》序中评价的那样：“凡物之生有理有形有数。三者妙于自然……离形求理则意与象睽，而理为无用；即形求理则道与器合，而理为有本。”知耕承认研究数学的目的是为了探索大自然的变化规律，认为“天地之所以立，日月之所以行，皆可以数知之者”。知耕对数学的抽象性也有一定的认识，“以虚

① 杜知耕．几何论约自序

② 徐光启．几何原本杂议．1607

③④ 李子金．杜端甫数学钥序

例实，用小谈大，自近测远"[①]是他常用的研究方法。杜知耕在治学中不拘泥于古人成法并具有大胆革新的精神，《几何论约》正是在这种思想指导下产生的。这对徐光启所期望的《几何原本》"百年之后必人人习之"局面的早日到来起到一定的推动作用。

## 二、《数学钥》

### 1. 版本流传

《数学钥》一书康熙二十三年(1681 年)有柘城杜氏式好堂刻本印行于世，现在北京大学图书馆有藏本。另外还有一种旧抄本(李盛铎旧藏本)。乾隆四十六年(1781 年)有四库全书本。从四库馆员按语中可以看出，当时有两种版本，其中一种版本被人窜改，与原书出入较大。四库全书本是根据当年初刊本加以校正后确定下来的，这种版本在海内外流传颇广。还有一种版本是 1916 年开封荣兴斋石印局印刷的，这种版本在国内各大图书馆一般都有藏本。

### 2. 主要内容

《数学钥》全书共 6 卷，277 页，约 15 000 字。凡例列出 38 则，问题 252 个，共 290 则。全书按九章分类，又据内容多寡分卷。多者两卷叙述一类问题，分上、下两部分；最少者一卷一个专题；还有的一卷两个专题；最多者一卷叙述四个专题。具体地说，第一卷为方田上(直线类)，凡例 14 则，目录 57 则，共 47 页。第二卷为方田下(曲线类)，凡例 6 则，目录 40 则，共 42 页。第三卷为卷上粟布、卷下衰分和附分法，凡例 6 则，卷上 28 则，卷下 18 则，附分法 5 则，共 42 页。卷四为少广，凡例 7 则，目录 32 则，共 50 页。卷五，上之上卷为商功，上之下卷为均输，下之上卷为盈朒，下之下卷为方程，凡例 5 则，目录上之上 8 则，上之下 7 则，下之上 8 则，下之下为 9 则，共 48 页。卷六为勾股，凡例 5 则，

① 吴学颢. 几何论约序

目录40则，共39页。因此可以看出，它的重点在方田章。它不仅用6卷中的2卷来叙述，而且就规模来说共89页，占全书的32%强。

3. 主要特征

《数学钥》内容的编排主要按九章的体例，又吸收欧几里得《几何原本》的线、面、体三部分主要思想和方法，并用详尽的图解方式为这些问题作注释以说明立论原理，有些重要地方还作出文字注释。大体上每卷都是先给出凡例，继而是本卷所要解决问题的目录，最后，大量的篇幅是对目录中所列问题一一给出详细解答。现分别作一简要介绍。

**凡例**　这是仿效《几何原本》的体例，每卷开头先给出凡例数则，也就是把本卷中所用到的名词、概念和其它要交待的事项列于卷首，作为本卷问题叙述和解答的理论基础。例如卷一，方田上，着重讲解直线类有关问题。卷首先列出直线形方面概念的定义、名词等14则，作为凡例。第一则“数非图不明，图非手指不明，图用甲乙等字作志者代指也……”这就是说，要正确研究数量关系，必须用图形解释，否则不能把道理说明白。图形不用手指不明确，要想达到目的，必须用甲、乙等字作标志。本则还重申，这样叙述简单省事，又不乱正文。另外，还交待，甲、乙等字用完后再用丙、丁等字。本则还用四边形对角顶点两个字表示此图形，这种表示方法很简单，现代数学中有许多地方仍用这种方法表示图形。第二则给出各种四边形和三角形的定义。如“四边皆等，四角中矩（直角）者曰方形（正方形）”、“四角中矩，四边两两相等者曰直形（矩形）”等。这些定义都很准确。但“四边等或两边等而四角均不中矩者曰象目形（菱形或平行四边形）”和“角不中矩、两边相等者曰梯形”两定义中，对平行四边形和梯形来说显然不十分准确。第三则“形边之界曰线，线之纵者曰长或曰高，衡者曰阔或曰广，在下者曰底，斜对两角者曰弦”，此处给

出线、长、阔、高等名词的定义，近代数学也常采用这些名词。但“弦”这一名词在此处的涵义却早已消逝。其它凡例分别给出线段方幂、两线段之和、两形之差、两线段乘积、垂线、磬折形、正方形周长、方环和圆环、全形和分形等概念的确切意义。

**目录**　《数学钥》一书不管每卷包含几个专题，凡例都只给出一个(若干则)。对于目录却要分专题列出，并且分别叙述。每一部分的目录大致可分为四部分：(1)传统问题；(2)作者新增问题；(3)西洋输入问题；(4)以作者的心得附加的问题。通过这几个方面的采题，使得每卷对某一个问题的研究比较系统全面，也便于实际应用。例如，卷四，少广目录。本部分列出 49 个问题，主要讨论空间几何体的各种计算方法。在传统空间几何体计算问题的基础上新增 9 个问题。这 9 个问题分别是：六边体(正六棱柱)、椭圆体(椭圆柱)、弧矢体(底面是弓形的部分圆柱体)、浑椭圆(椭球)、鳖臑(四面都是勾股形的四面体)、等广锐面体(拟柱体)、锐面椭圆体(上、下底为不同椭圆的合体)的求积问题，方体(正方体)以积求边一、二法，直体(长方体)以积求边二法和浑椭圆以积求径等。另外，又吸收西法二则，其一是浑圆(球)求积二法，其二是诸锐面体(正六棱台)求积。最后还附加五种算法：六边体求积法后附八边(正八棱柱)和十二边(正十二棱柱)求积法，五边体求积法后附九边体求积法，三乘还原法(开四次方)后附五乘和七乘还原法等。

**问题解答**　《数学钥》解答问题的格式是先给出问题，然后是“法”，继而是“解”。这里的“法”相当于现代数学解答问题的方法、公式或定理，而“解”相当于对所用的方法、公式或定理进行理论证明。问题的解答有如下特点：

(1)巧妙利用图形论证解法理论，充分体现“数非图不明”的形数结合思想。全书 252 个问题(凡例除外)，凡是基础性问题几乎都给出了图解说明。图注详尽，浅显易懂。例如卷一，第五十

一则“斜方形(直角梯形)依小边截积，求截阔”，题目是：

“设斜方田元长九十步，大边阔三十八步，小边阔二十步。自小边截积八百二十二步五分，求截阔。”如图 2.3.30 所示。

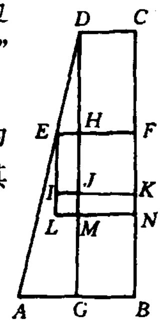



图 2.3.30

设元长(梯形高)为 $h$，大边(下底)为 $a$，小边为 $b$，截积(⏢$EFCD$)为 $S$，截阔($EF$)为 $x$，则其“法”用现代公式表示即

$$x=\sqrt{\frac{2S(a-b)}{h}+b^2}。$$

其“解”为，先作□$ELNF$ 和□$HJKF$，则

一廉(▭$EIJH$)$=HF\cdot HE=\frac{▭HFCD}{HD}\cdot HE$，

半隅($\frac{1}{2}$⊡$LMJI$)$=\frac{1}{2}LM\cdot IL=\frac{1}{2}HE^2=\frac{\triangle EHD}{HD}\cdot HE$，

一廉半隅$=\frac{HE}{HD}$(▭$HFCD+\triangle EHD$)$=\frac{HE}{HD}\cdot S$。

因为$\frac{HE}{HD}=\frac{AG}{DG}$，所以

一廉半隅$=\frac{AG}{DG}\cdot S=\frac{S(a-b)}{h}$。

二廉一隅$=\frac{2S(a-b)}{h}$。

又 $x^2=$□$ELNF$，

□$ELNF=$二廉一隅$+$□$HJKF=\frac{2S(a-b)}{h}+b^2$，

所以 $x=\sqrt{\frac{2S(a-b)}{h}+b^2}$。

由此例可以看出，杜知耕的图解构思巧妙，独具匠心，论证步骤简短，论述严谨。

(2)广泛吸收《几何原本》等西洋传入的数学方法，全面反映中西会通时期的数学研究特征。首先，在问题解答中有许多方法

就是直接从西洋传入数学中照搬过来的。例如，在全书的解法中，注有“西法”、“几何原本云”、“见大测或八线表”、“亚奇默德(即阿基米德)云”、“泰西几何原本云”、“又尝借西洋割圆八线表考之”等共十余处。其次，问题解答仿效《几何原本》中演绎式的逻辑推理论证方法。《几何原本》的特征就是先给出一些基本数学概念及其定义和公理，然后运用逻辑推理方法论证命题的正确性。这是一种抽象的、从一般前提出发推出个别结论的演绎推理思维形式。《数学钥》中的凡例实际上就是先给出一些基本概念和公理，再根据本书已证明的命题或其他著作中已有的结论来证明新的定理。我们在书中常见到“见某卷某则”或“测量全义云”等。论证思想明显属于演绎推理体系。例如卷四，第三则“堑堵求积”：

“设堑堵长一十二尺，广五尺，高七尺，求积。

“法曰：以广乘长，以高乘之，折半得二百一十二尺，即所求。

“解曰：甲乙丙丁直体与堑堵高、广、长各等，依甲乙线，丙丁棱分之必成二堑堵。夫一直体既能当二堑堵，则一堑堵必当半直体也，故折半得积。”

若用 $a$，$b$，$c$，$V$ 分别表示堑堵的高、广、长和体积，则该题的“法”用现代公式表即 $V=\frac{1}{2}abc$。

《数学钥》以传统数学九章为体例，又加以西洋传入的线、面、体三部之法，用图解的方法来研究中西数学，这在当时，对知识界的人士来说无论从感情上或方法上都是容易接受的，所以在中西会通时期起了积极作用。在当时以及后世，许多学者都曾对该书进行过研究，并且给予肯定。梅文鼎曾对此书作过高度评价，他说：

“近代作者如李长茂算海洋说亦有发明，然不能具九章。惟方位伯(中通)数度衍于九章之外搜罗甚富。杜端甫(知耕)数学钥图

注九章颇中肯綮，可为算家程式，其说固不诬矣。”①

《数字钥》以内府藏本全文收入四库全书时，四库馆员们所加的按语中又重申了这一点。李子金也对此书作出正确评价，他说：

“世所传算家诸书皆备载九章之法而不言其义，故使后之学者多习矣不察其弊。惟唐荆川先生著为六论，欲讲明九章之法，可谓有功此道。然考其所言，或止得其似而未得其真者有之；或止得其当然而未得其所以然者有之。终不若端甫之书，胪列井井，明白而易晓，使人由浅入深，因博为天下贤、智、愚不肖，无不能读，可以行天下后世而无弊也。”②

钱宝琮在论及《几何原本》对清初学者影响时曾指出：“《几何原本》中逻辑推理的论证方法在徐光启《测量异同》、《勾股义》与杜知耕的《数学钥》等著作中都有所反映。”③ 这种与徐光启著作相提并论的评价，正说明《数学钥》在清初数学发展史中所处的重要位置。

至于本书为何取名《数学钥》，李子金曾给出恰当的解释。他说：

“训诂而疏通之，画图而剖析之，以考验之形合布算之数，使古人用法之意无微不出，诚前所未有之书也。因名之曰数学钥，意谓学算之士苟得是书而读之，如锁之钥向之扃锢，而不可解者无不豁然而洞开矣。”④

---

① 梅文鼎．勿庵历算书目

② 李子金．杜端甫数学钥序

③ 钱宝琮．中国数学史．北京：科学出版社，1981

④ 同②。

## 第五节　陈世仁与《少广补遗》

陈世仁(1676～1722)，字元之，号焕吾，今浙江省海宁人，康熙年间数学家，专心研究“垛积术”，著有《少广补遗》一书，所得结果在我国级数研究方面占有一席之地。

陈世仁之所以专心研究数学，与所处的家庭环境有一定关系。叔父陈讦(1650～1722或1732)，贡生，曾任浙江省淳安县学教谕。一生从事数学研究，著有《勾股引蒙》5卷和《勾股述》2卷附《开方发明》1卷。这些都是初等数学入门书籍，前者顺次介绍笔算、四则运算、开平方和开立方、勾股算术等；后者讲述笔算和一些平面三角法。陈讦之子陈世佶也是一位数学家，曾著有《弧矢割圆》1卷、《少广补遗发明》1卷、《勾股演段》1卷和《开方捷法》1卷等书。

康熙乙未年(1715年)陈世仁经殿试中进士，入翰林院。后辞官返回故里侍奉老母，余暇研究数学。所著《少广补遗》1卷，专论“垛积之法”。陈世仁对方程也作过深入研究，撰《方程申论》6卷。

“垛积术”是我国古代解决高阶等差级数求和的一种方法。然而把垛积看做是“少广”可能是从陈世仁开始的。阮元不同意这种看法。他说：“垛积之术，不见于《九章》，乃‘商功’之流，而以为‘少广’者，近代算家之陋也。”[①]康熙年间，许多数学名著大都散佚，传统数学几乎成了绝学。陈世仁是在未见到杨辉、朱世杰著作情况下独立钻研，并且取得不少成就的。近人钱宝琮给予高度评价。他说：

“其时宋元算书湮没不传，当代畴人无研治垛积术者，世仁自

① 阮元．畴人传．卷四十一

出机杼，独于此学多所发明。所撰书虽止一卷，然以少许胜人多许，亦足以自豪矣。"①

阮元虽不同意陈世仁的看法，但对陈世仁的成就却给予肯定。他说："世仁详人之所不详，其用心有足尚已。"②

陈世仁《少广补遗》是关于垛积方面的专著，其术来源于我国古代算书中的高阶等差级数求和问题。等差级数问题的研究在我国出现较早，首见于《周髀算经》（公元前1世纪），其后《九章算术》（公元前1世纪）、《张丘建算经》（公元4世纪）也有不少此类题目。北宋沈括（1031～1095）在其著作《梦溪笔谈》中提出解决长方台形垛积的一般求和公式的"隙积术"，得出正确的二阶等差级数求和公式，南宋杨辉称此术为"垛积"。元代朱世杰把我国高阶等差级数求和问题的研究向前推进了一步，发展成为垛积招差。元明的丁巨、周述学、程大位等都对此问题有所研究，但都没有多少新成果。陈世仁的研究，是继朱世杰之后四百余年间才取得的重大突破，对我国高阶等差级数研究做出了重要贡献。

《少广补遗》一书没有刊本，而《四库全书》以两江总督采进本收入子部六·天文算法类二中。尚有几个抄本分别藏于南京图书馆和广东中山图书馆，李俨的抄本现藏于中国科学院自然科学史研究所图书馆。

《少广补遗》全书分7篇，只1卷，约13 000字。书末附有"少广补开尖法设如"与"少广补开尖法发原"两部分。

第一篇"准本章平立方圆开三角及诸尖一十二法"。这12法分别是：平尖、立尖、倍尖、方尖、再乘尖、抽奇平尖、抽偶平尖、抽偶数立尖、抽奇数立尖、抽奇偶数方尖、抽偶再乘尖和抽奇再乘尖。

---

① 钱宝琮. 浙江畴人著述记. 见钱宝琮科学史论文选集. 北京：科学出版社，1983

② 阮元. 畴人传. 卷四十一

第二篇“开抽奇抽偶立尖”。共4个公式。

第三篇“准本章带纵诸方开三角及诸尖之半积为三角带一钝角形，诸尖先得径数以法得底数”，共载5个公式。

第四篇“开三角及诸尖之半积，先得径数以法算得底数”，共载5个公式。

第五篇“开抽偶立尖之半积合尖内奇偶诸层取层内数偶者去之，先得径数以法算得底数”，共载4个公式。

第六篇“开抽奇立尖之半积合尖内奇偶诸层取层内数奇者去之，先得径数以法算得底数”，共载4个公式。

第七篇“准本章多乘方以立尖形律余尖得四法”，共载4个公式。

全书共38个公式，其中第一篇的12个公式是基本的，其余都是这些公式的变形。全书的结构按5个最基本公式展开。

(1)平尖：平尖，抽奇平尖和抽偶平尖，平尖半积，抽奇平尖半积和抽偶平尖半积。

(2)立尖：立尖，抽奇立尖和抽偶立尖，开抽奇立尖和开抽偶立尖，立尖半积，抽奇立尖半积和抽偶立尖半积，开抽偶立尖半积和开抽奇立尖半积，立尖还准立尖。

(3)倍尖：仅此一个公式。

(4)方尖：方尖，抽奇偶数方尖，方尖半积，抽奇数方尖半积和抽偶数方尖半积，方尖准立尖，抽偶方尖准立尖，抽奇方尖准立尖。

(5)再乘尖：再乘尖，抽偶再乘尖和抽奇再乘尖。

对于每一个公式，作者不是叙述如何求级数和，而是给出级数前$n$项和后，求出第$n$项的通项公式或者求第$n$项表达式的有关数据，譬如求出$n$。由于作者对每一个级数的名称都是自己命名的，况且求解过程文字又艰涩难懂，因而，为了容易理解和便于接受，作者又对每一个公式给出具体例子，解法也用数字来说明。

例如，第一篇“准本章平立方圆开三角及诸尖一十二法”的第五“再乘尖”，其定义是“尖内诸立方依根数序次相并”，其解法为：

“置实二除之，于除得数内复减原实，平方开之。继以开得数为实，带一纵方开之得原数之底数。从底数逆数至尖，数偶者得底数所对之前数；数奇者得自尖及底之中数，中数与底数相乘，对数加一五于数之次，亦与底相乘所得数为本数径数。”

“少广补开尖法设如”中“再乘尖设如”

“原数三十六”

解法为：

“二除数十八，内复减原实余一四四，平方根十二，带一纵方收得三，三数逆至尖得中数二，二乘三得六。

尖之实　一，八，二十七。”

从设如看，“再乘尖”的定义为级数

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3。\qquad ①$$

设前 $n$ 个自然数立方和，即级数①的各项和为 $S$，则级数①的解法可归结为解方程

$$\sqrt{\frac{10S}{2}-S}=n^2+n,$$

求出 $n$ 来。将该方程变形为

$$\frac{10S}{2}-S=(n^2+n)^2,$$

$$S=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2。$$

这就是级数①的求和公式。

此例中的“底数” $n=3$，“中数”为 $\frac{3+1}{2}=2$，因而“径数”为 2 乘 3 得 6，这样 6 的平方即“原数” 36。

为了说明从“底数”逆数至尖为奇数的情况，作者又举一例说明：

“原数一百

二除数五十，复减原实余四，平方根二十，带一纵方收得四，四数逆至尖得对数二，加五数于对数之次得二五，四因二五得十。”

这一例中“底数”为4，则1+4=5为奇数。取$\frac{4+1}{2}$的整数部分2即为“对数”，然后加0.5于其后得2.5，这样2.5×4=10，10的平方100，即“原数”。

“少广补开尖法发原”在第一篇、第二篇和第七篇中共计22个公式. 在通项公式中$n$取1(或者偶数时取2)又作了验证，说明具体计算方法。

《少广补遗》中所载38个公式，其中除少量是前人已有的，如“平尖”、“立尖”、“方尖”等外，其他大部分为独创。为了便于理解整个公式的名称，在这里把它们全部列出。

第一篇　三角及诸尖十二法

1. 平尖　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

2. 立尖　$1+3+6+\cdots+[1+2+3+\cdots+(m-1)]=\frac{m^3-m}{6}$，$m=n+1$。

3. 倍尖　$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。

4. 方尖　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

5. 再乘尖　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$。

6. 抽奇平尖　$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$。

7. 抽偶平尖　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

8. 抽奇立尖　$2(1)+2(1+2)+2(1+2+3)+\cdots+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=\frac{1}{3}(n^3-n)$。

9. 抽偶立尖　$(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots+[1+3+5+$

$$\cdots+(2n-1)]=\frac{1}{3}n(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2})。$$

10. **抽奇偶数方尖**　$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1)。$$

11. **抽偶再乘尖**　$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$。

12. **抽奇再乘尖**　$2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$。

**第二篇　开抽奇抽偶立尖**

1. **本尖内层数偶者去之**

$$1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)+\cdots+[1+2+3+\cdots+(2n-1)]=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)。$$

2. **本尖诸层内数偶者去之**

(1) $1+1+(1+3)+(1+3)+(1+3+5)+(1+3+5)+\cdots+[1+3+5+\cdots+(2m-1)]=\frac{1}{3}m(2m^2+1)$，$n=2m-1$ 为奇数；

(2) $1+1+(1+3)+(1+3)+\cdots+[1+3+5+\cdots+(2m-1)]+[1+3+5+\cdots+(2m-1)]=\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)$，$n=2m$ 为偶数。

3. **本尖内层数奇者去之**

$$(1+2)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5+6)+\cdots+(1+2+3+\cdots+2n)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)。$$

4. **本尖诸层内数奇者去之**

(1) $2+2+(2+4)+(2+4)+\cdots+(2+4+\cdots+2m)$

$=\frac{2}{3}m(m+1)(m+2)$，$n=2m$ 为偶数；

(2) $2+2+(2+4)+(2+4)+\cdots+[2+4+\cdots+2(m-1)]+$

$[2+4+\cdots+2(m-1)]+[2+4+\cdots+2m]=\frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)$，$n=2m-1$ 为奇数。

## 第三篇　准本章带纵诸方开三角及诸尖之半积似三角带一钝角形

1. 平尖　$(2r+1)+(2r+2)+\cdots+(2r+n)$

$$=\frac{1}{2}n(4r+n+1)。$$

2. 抽奇平尖　$2r+(2r+2)+(2r+4)+\cdots+[2r+2(n-1)]$

$$=n(2r+n-1)。$$

3. 抽偶平尖　$(2r+1)+(2r+3)+(2r+5)+\cdots$

$$+[2r+(2n-1)]=n^2+2r\cdot n。$$

4. 立尖　$(1+2+3+\cdots+r)+[1+2+3+\cdots+(r+1)]+\cdots$

$$+[1+2+3+\cdots+(r+n-1)]$$

$$=\frac{1}{2}nr(r+n)+\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)。$$

5. 方尖　$(r+1)^2+(r+2)^2+\cdots+(r+n)^2$

$$=\frac{4}{4}[nr^2+(n+1)nr]$$

$$+\frac{1}{6}[(2n)^3+3(2n)^2+2(2n)]。$$

## 第四篇　开三角及诸尖半积

1. 抽偶立尖原注本尖内层数偶者去之

$$\{1+2+3+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\{1+2+3+\cdots$$
$$+[2(r+2)-1]\}+\cdots+\{1+2+3+\cdots+[2(r+n)-1]\}$$

$$=2nr^2+n(2n+1)r+\frac{1}{12}[(2n)^3+\frac{3}{2}(2n)^2-(2n)]。$$

2. 抽偶立尖原注本尖内层数及诸层内数偶者皆去之

$$\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\{1+3+5+\cdots$$
$$+[2(r+2)-1]\}+\cdots+\{1+3+5+\cdots+[2(r+n)-1]\}$$

$$=nr^2+n(n+1)r+\frac{1}{24}[(2n)^3+3(2n)^2+2(2n)]。$$

3. **抽奇立尖原注本尖内层数奇者去之**

$$[1+2+3+\cdots+2(r+1)]+[1+2+3+\cdots+2(r+2)]+\cdots+[1+2+3+\cdots+2(r+n)]=2nr^2+(2n+3)nr+\frac{1}{12}[(2n+1)^3+(2n+1)^2+2(n+1)(n-1)]。$$

4. **抽奇立尖原注本尖内层数及诸层内数奇者皆去之**

$$[2+4+\cdots+2(r+1)]+[2+4+\cdots+2(r+2)]+\cdots+[2+4+\cdots+2(r+n)]=nr^2+n(n+2)r+\frac{1}{3}(n^3+3n^2+2n)。$$

5. **抽奇偶数方尖**

(1) $[2(r+1)-1]^2+[2(r+2)-1]^2+\cdots+[2(r+n)-1]^2$

$$=\frac{1}{3}[10nr^2+4n(3n+1)r]+\frac{1}{6}[(2n)^3+3(2n)^2+(2n)]-\frac{1}{6}[12n^2-3n]；$$

(2) $[2(r+1)]^2+[2(r+2)]^2+\cdots+[2(r+n)]^2$

$$=4nr^2+4n(n+1)r+\frac{1}{6}[(2n)^3+3(2n)^2+2(2n)]。$$

## 第五篇　开抽偶立尖之半积合尖内奇偶诸层取层内数偶者去之

1. **其一得径偶**

(1) $\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\cdots+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n}{2}\right)-1\right]\right\}+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n}{2}\right)-1\right]\right\}$

$$=\frac{1}{2}[2nr^2+n(n+2)r]+\frac{1}{12}[n^3+3n^2+2n]；$$

$$(2)\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\{1+3+5+\cdots+[2(r+2)-1]\}+\{1+3+5+\cdots+[2(r+2)-1]\}+\cdots$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n}{2}-1\right)-1\right]\right\}$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n}{2}-1\right)-1\right]\right\}$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n}{2}\right)-1\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{4}[4nr^2+2n^2r-n^2]+\frac{1}{12}[n^3+3n^2+2n]。$$

2. 其一得径奇

$$(1)[1+3+5+\cdots+[(2r-1)]+\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\cdots$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n-1}{2}\right)-1\right]\right\}$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n}{2}\right)-1\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[2nr^2+(n^2-1)r+\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)-\frac{1}{6}(6n^2-12n+6)\right];$$

$$(2)\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\{1+3+5+\cdots+[2(r+1)-1]\}+\cdots+\{1+3+5+\cdots$$
$$+\left[2\left(r+\frac{n-1}{2}-1\right)-1\right]\}$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n-1}{2}-1\right)-1\right]\right\}$$
$$+\left\{1+3+5+\cdots+\left[2\left(r+\frac{n-1}{2}\right)-1\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2nr^2+(n^2-2n+1)r+\frac{1}{6}[(n-3)^3+3(n-3)^2+2(n-3)]+\frac{1}{6}(3n^2-6n+3)\right\}。$$

## 第六篇　开抽奇立尖之半积合尖内奇偶诸层取层内数奇者去之

1. 其一得径偶

(1) $[2+4+\cdots+2(r+1)]+[2+4+\cdots+2(r+1)]+\cdots$

$+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n}{2}\right)\right]+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}[2nr^2+n(4+n)r]+\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]$；

(2) $[2+4+\cdots+2r]+[2+4+\cdots+2(r+1)]+[2+4+\cdots$

$+2(r+1)]+\cdots+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n}{2}-1\right)\right]$

$+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n}{2}-1\right)\right]+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}[2nr^2+n(n+2)r]+\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]$

$+\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-2-\frac{1}{12}(6n^2+n-21)$。

2. 其一得径奇

(1)$(2+4+\cdots+2r)+[2+4+\cdots+2(r+1)]+[2+4+\cdots$

$+2(r+1)]+\cdots+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n-1}{2}-1\right)\right]$

$+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n-1}{2}-1\right)\right]=\frac{1}{2}[2nr^2+(n^2+2n-1)r]$

$+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+3\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}(n^2-1)$；

(2)$(2+4+\cdots+2r)+(2+4+\cdots+2r)+\cdots$

$+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n-1}{2}-1\right)\right]$

$+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n-1}{2}-1\right)\right]$

$+\left[2+4+\cdots+2\left(r+\frac{n-1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}[2nr^2+(n^2+1)r]$

$+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+3\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]+\frac{1}{4}(n^2-1)$。

## 第七篇　准本章多乘方以立尖形推余类

1. 方尖准立尖

$$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots+(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{12}[(n+1)^4-(n+1)^2]。$$

2. 抽偶方尖准立尖

$$1^2+(1^2+3^2)+(1^2+3^2+5^2)+\cdots+[1^2+3^2+5^2+\cdots$$
$$+(2n-1)^2]=\frac{1}{3}\{[n(n+1)]^2-\frac{1}{2}n(n+1)\}。$$

3. 抽奇方尖准立尖

$$2^2+(2^2+4^2)+(2^2+4^2+6^2)+\cdots+[2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2]$$
$$=\frac{1}{3}[(n+1)^4-(n+1)^2]。$$

4. 立尖还准立尖

$$1+(1+1+2)+(1+1+2+1+2+3)+\cdots+(1+1+2+1+2$$
$$+3+\cdots+1+2+3+\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}。$$

可惜此书中未有图形，因而很难说明陈世仁是如何得出这些公式的。尽管如此，《少广补遗》一书在清初数学发展史中的地位和作用是应当肯定的。四库馆员们也曾给以公正的评价："虽图说未具，不能使学者窥其立法之意，而于少广之遗法引申触类，实于数学有裨。"

陈世仁的这些求和公式，在我国级数研究方面有独到的见解。其中"再乘尖"、"抽奇偶数方尖"、"抽偶再乘尖"和"抽奇再乘尖"等都是"幂和公式"的特例。"幂和公式"到 19 世纪，在我国得到重大发展。李善兰在《垛积比类》卷二中专门讨论这一问题并取得许多辉煌成果。

# 第 三 编

# 康熙帝与数学

在中国历史上，与数学关系最密切的帝王，首推康熙帝。他本人酷爱数学，进行过认真学习和研究，晚年主持编撰《律历渊源》，其中数学部分占一半以上，即有名的《数理精蕴》。本编以康熙帝对数学的研习和《数理精蕴》为中心，展开详细论述。

## 第一章 酷爱数学的康熙帝

康熙帝，清圣祖爱新觉罗·玄烨，是清朝继世祖顺治之后的第二代皇帝。他出生于1654年5月4日，卒于1722年12月20日，8岁登基，在位61年，是中国历史上著名的君主之一，在世界历史上，与法国的路易十四(1661～1715年)、俄国的彼得大帝一世(在位1682～1725年)同时代。

康熙帝不仅重视科学技术，支持科学研究，而且带头亲自学习科学，涉猎天文学、数学、地理学、农学、医学和制图学等，"尤其对于数学、天文有特殊兴趣"①。1712年，他下诏编纂大型乐律天算丛书《律历渊源》100卷，其中《数理精蕴》53卷就是专论数学的。在我国历史上，像他这样如此重视科学技术的皇帝是

① 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 268

极为罕见的。

本章主要讨论康熙帝学习科学技术的时代背景，数学思想，与历算家李光地、梅文鼎的交往以及《数理精蕴》的编纂概况等。

## 第一节 康熙帝学习科学的背景

康熙帝学习科学技术的动机，不是像科学家那样出于对科学事业的追求，而是作为一国之君从治理国家的需要出发。康熙帝即位初期发生的中西历法之争的杨光先(1597～1669 年)事件，可以说是促使其学习自然科学的重要起因。

崇祯十七年(1644 年)五月，清兵进入北京，明王朝灭亡。传教士汤若望乘清政府刚建国，急需一部新历法颁行之机，便把《崇祯历书》稍加修改，压缩成 103 卷，定名为《西洋新法历书》，进呈给清政府。清廷决定采用，并据以编制日用历书称之为《时宪历》，同年十一月，将历局与钦天监合并，任汤若望为钦天监监正。

由于清政府对汤若望倍加宠信，因而逐渐扩大了耶稣教会的影响，这样，清朝大臣中一部分守旧势力与耶稣教会的矛盾开始激化。

顺治十六年己亥(1659 年)，江南徽州府新安(今安徽省歙县)卫官生杨光先作《辟邪论》上，反对天主教。同年五月，又作《摘谬十论》，指出汤若望《时宪历》存在错误。顺治十七年(1660 年)十二月初三，杨光先又向礼部呈上一个《正国体呈》诉状，控告《时宪历》上有“依西洋新法”[①] 五字，这是汤若望“窃正朔之权以予西洋”[②]；另外，该历法还有错误，但礼部未予受理。

康熙三年甲辰(1664 年)三月十五日，杨光先上书许青翁侍郎

---

①② 中国天文学史整理研究小组. 中国天文学史. 北京：科学出版社，1987. 226

反对天主教。七月二十六日杨光先再次向礼部上《请诛邪教状》，状诉汤若望传造妖书和谋反，其中谈到天主教“二十年来收徒百万，散在天下”[①]等罪名，容易使清政府感到威胁政权，加之当时辅政的鳌拜也和西洋人有矛盾，因而这次杨光先胜诉。八月初六，清政府会审汤若望等在京传教士一日。康熙四年乙巳(1665 年)三月，因杨光先《摘谬论》指控汤若望新法十谬，又在《选择议》一文中举出钦天监选择顺治幼子荣亲王的葬期“不用正五行，用洪范五行，以致山向日月俱犯忌杀，事犯重大”[②]。礼部判汤若望凌迟，禁止天主教活动，在京传教士充军，各省传教士押解广州，驱逐出境。在此案中，钦天监杜如预、杨宏量、李祖白、宋可成、宋发、朱光显、刘有泰七人被判凌迟处死；刘必远、贾文郁、宋哲、李实、潘尽孝(汤若望义子)被判斩立决。后因北京连日发生五次地震，清政府按惯例对罪犯减刑。最后，降旨汤、杜、杨免死。四月，李祖白、宋可成、宋发、朱光显、刘有泰五人被处斩，其余充军。

因杨光先无真才实学，对历法一知半解，所以，康熙四年四月清政府授杨为钦天监监右时，他本人以“但知推步之理，不知推步之数”[③]为由请求辞职，不准。五月到钦天监供职，又三次辞职，始终不准。七月补为监正，八月第五次辞职，九月授为监正，降旨“着即受职办事，不得渎辞”[④]。就这样，杨光先在不得已的情况下任钦天监监正。杨光先可以说是中国封建社会中顽固守旧势力的典型代表，主张“宁可使中夏无好历法，不可使中夏有西洋人”[⑤]，因而上任以后，废止《时宪历》，改用明《大统历》。然而，《大统历》早已过时，杨光先没办法，只得起用以前被汤若望

---

① 中国天文学史整理研究小组. 中国天文学史. 北京：科学出版社，1987. 226

② 时宪志一. 见：清史稿. 卷四十五

③④⑤ 杨光先. 不得已

革职的回回科秋官正吴明烜为监副，改用《回回历》。

《回回历》也已过时，几年之中杨光先主持的钦天监天文观测和编制历书出了很多差错。康熙七年(1668年)十一月，康熙帝派人带杨光先和吴明烜编制的康熙八年(1669年)历书去向治理历法的南怀仁征求意见。南怀仁指出这部历书“是年十二月置闰，应在康熙九年正月，又一岁两春分、两秋分，种种舛误”①。康熙谕杨光先、南怀仁：“授时乃国家要政，尔等勿挟宿仇，以己为是，以彼为非。是者当遵用，非者当更改，务期归于至善。”②让他们各抒己见，畅所欲言。但是双方各持己见，没有一个明白结果。康熙帝本人当时没有能力判断孰正孰误，决定通过实际观测来辨明是非曲直。康熙八年(1669年)二月，命大学士图海、李霨率两派人员共20人亲赴观象台测验，结果表明“南怀仁所言皆合，吴明烜所言皆谬”③。次年一月，对立春、雨水节气，月亮、火星、木星观测也有如上结论。康熙八年三月，议政王等议，将康熙九年(1670年)一应历日交给南怀仁推算。康熙帝通过这件事，感触很深，开始认真思考：过去杨光先控告汤若望时，议政王等议“以杨光先何处为是”④，而恢复旧历法，“以汤若望何处为非”⑤，而停止使用新历法，应查明“当日议停今日议复之故”⑥。最后调查清楚，杨光先守旧，盲目排斥西法，使用旧法后又不能修改历日错误，没有真才实学，造成重大损失，革职拟斩，后念其年老，赦免归里，死于途中；南怀仁的历法是有科学根据的，康熙八年三月任命其为钦天监监副，仍恢复使用《时宪历》。康熙帝支持南怀仁编制历法，制造天文观测仪器。康熙十二年(1673年)新的仪器制成，共6件，南怀仁被提升为钦天监监正。康熙十三年(1674

---

① 杨光先．见：清史稿．卷二七二

②③ 时宪志一．见：清史稿．卷四十五

④⑤⑥ 清圣祖实录．卷二十八．六页

年)二月，进呈新制的《灵台仪象志》16卷，康熙帝看过以后很高兴，又“加南怀仁太常寺卿衔，仍治理历法”[①]。杨光先状告汤若望纯属诬陷，清政府为这一事件中受害者平反。康熙八年八月，给康熙五年去世的汤若望昭雪，恢复他“通微教师封号，视原品赐恤”[②]，还给建堂基地，举行葬礼。给李祖白等被斩五人赐恤，革职流放者仍按原职起用。

关于中西历法的争议，本来是一个单纯的学术问题，但由于历史的原因，便和政治问题纠缠在一起，使得问题复杂化。康熙帝尊重科学，以其雄才大略，后来正确地处理了这件事，其成功之处在于拨开迷雾，在纷乱混杂之中把学术问题与政治问题区分开来，使冤案昭雪，表现了一个政治家的若谷胸怀。通过这件事，康熙帝深刻认识到，作为一国之君，也应该了解一些科学技术，甚至通晓其基本理论知识，才能在处理国是时明辨是非，具有裁决能力，因而开始努力学习西方传入的数学、天文学以及传统历算等科学技术，并取得很好成绩。后来他在给大臣议政论及其学习动机时说：

“尔等惟知朕算术之精，却不知朕学算之故。朕幼时，钦天监汉官与西洋人不睦，互相参劾，几至大辟。杨光先、汤若望于午门外九卿前当面赌测日影，奈九卿中无一知其法者。朕思己不知，焉能断人之是非，因自愤而学焉！”[③]

康熙帝的兴趣非常广泛，在社会科学方面认真学习汉语、经济、历史、军事和古代典籍等；在自然科学方面除了酷爱数学天文学外，还涉猎地理学、农学、医学和水利等，并亲自实践，这种热爱科学的热情至老不衰。他开始学习时首先拜南怀仁为师，

---

① 清圣祖实录．卷四十六．二页

② 汤若望．见：清史稿．卷二七二

③ 见《庭训格言》第八十六页。

“南怀仁神甫给康熙皇帝讲解了主要天文仪器、数学仪器的用法和几何学、静力学、天文学中最新奇最简要的内容，并就此特地编写了教材”①。这些教材是用什么文写的，都是什么内容，至今尚未见到有关报道，因此都不了解，估计早已不存在了。

1685年，即康熙二十四年，法国皇帝路易十四为了对抗葡萄牙，对中国采取了积极的传教方针，以扩大法国的势力，派遣塔沙尔(Cuy Tachard)、洪若翰(Jean de Fontaney,1643～1710)、白晋(Joachim Bouvet,1656～1730)、李明(Louis Le Comte,1655～1728)、张诚(Jean-Fragois Gerbillon,1654～1707)、刘应(Claude de Visdelou,1656～1737)等六人来东方，除塔沙尔一人留暹罗(今泰国)外，其余五人于1687年抵达中国，这五人都通数学。此前，已有葡萄牙传教士徐日升、闵明我和比利时传教士安多等已在北京。法国的五位传教士由南怀仁帮助，于1688年到北京。此时南怀仁去世，由徐日升引见，康熙帝接见他们，并把善算的白晋、张诚留在宫中，教授历算。讲课人还有徐日升和安多。四人轮流担任主讲，康熙帝也认真听讲和学习。有如下的记载：

“康熙二十八年(1689年)十二月二十五日上召徐日升、张诚、白进(即白晋)、安多等至内廷，谕以自后每日轮班，至养心殿，以清语授量法等西学。上万几之暇，专心学问，好量法、测算、天文、形性、格致诸学。自是即或临幸畅春园(在西直门外十二里)，及巡行省方，必谕张诚等随行，或每日或间日授讲西学。并谕日进内廷将授讲之学，翻译成清文成帙，上派精通清文二员，襄助缮稿，并派善书二员誊写，张诚等每住宿畅春园……张诚等讲授数年，上每劳之。”②

康熙帝对传教士的讲授活动要求很严，工作很紧张。张诚在

① 白晋．康熙皇帝．赵晨译．哈尔滨：黑龙江人民出版社，1981．32

② 黄伯禄．正教奉褒(下册)．光绪三十年上海慈母堂第三次排印本．106～107

一次报告中称：

“每朝四时至内廷侍上，直至日没时还，不准归寓，每日午前二时间，及午后二时间，在帝侧讲欧几里得几何学，或理学及天文学等，并历法炮术之实地演习的说明。归寓后，再准备明日的工作，直至深更入寝，时以为常。”①

康熙帝严于律己，刻苦学习，实地操作练习，进步很快。白晋说：“皇上认真听讲，反复练习，亲手绘图，对不懂的地方立刻提出问题，就这样整整几个小时和我们在一起学习。然后把文稿留在身边，在内室里反复阅读。同时，皇上还经常练习运算和仪器的用法，复习欧几里得的主要定理，并努力记住其推理过程。这样学习了五六个月，康熙皇帝精通了几何学原理，取得了很大进步，以致于一看到某个定理的几何图形，就能立即想到这个定理及其证明。有一天皇上说，他打算把这些定理从头到尾阅读十二遍以上。”②

康熙帝对西洋传入的算器很感兴趣，亲手操作，掌握用法。白晋说：“我们用满语把这些原理写出来，并在草稿中补充了欧几里得和阿基米德著作中的必要而有价值的定理和图形。除上述课程外，康熙皇帝还掌握了比例规的全部操作法、主要数学仪器的数学用法和几种几何学和算术的应用法。”③

康熙帝学习数学，不仅注意掌握基础理论知识，更重要的是还要学会应用。白晋说：“(他在)充分领会了几何原理以后，还希望能用满语起草一本包括全部理论的应用几何学问题集，并以讲解原理时所用的方法，讲应用几何学。”④

康熙帝身为国君，日理万机，还在余暇时间学习，用心良苦，

---

① 张诚与尼布楚条约．刘玉衡译．国闻周报(13卷11期)，1936-3-23

②③ 白晋．康熙皇帝．赵晨译．哈尔滨：黑龙江人民出版社，1981．34

④ 白晋．康熙皇帝．赵晨译．哈尔滨：黑龙江人民出版社，1981．35

成绩显著，进而产生浓厚兴趣，其刻苦精神使传教士为之感动。白晋说："皇上在研究数学的过程中，已感到最大的乐趣，因此，他每天都和我们在一起度过两三个小时。此外，在内室里，不论白天还是夜晚，皇上都把更多的时间用于研究数学。……每当学习到几何学中最有价值的知识时，皇上总是怀着浓厚的兴趣，把这些知识应用于实际，并练习数学仪器的操作。由此可见，康熙皇帝为了独立解决与我们以前所讲过的相类似的问题，曾经做出何等努力，实在令人钦佩之至。"①

康熙帝不仅向西洋传教士学习科学知识，同时还访求民间历算专家切磋学问，这一点我们在后边再议。

康熙帝以其惊人的毅力、刻苦精神以及过人的才能学习数学，到了中年已经具备深厚的数学理论功底和一定的学术造诣，写出了数学著作。现在北京图书馆藏有一小本"康熙御制"《三角形论》，"很可能是康熙的数学著作"②。还有一部《积求勾股法》。

另外，康熙帝还经常和大臣们讨论数学问题，或实地进行数学理论应用操作。如康熙三十一年壬申(1692 年)，"是年正月，圣祖御乾清门与群臣论算数。"③康熙五十年辛卯(1711 年)，康熙帝与直隶巡抚赵宏燮论算数，谓："算法之理，皆出于《易经》。即西洋算法亦善，原系中国算法，彼称'阿尔朱巴尔'。'阿尔朱巴尔'者，传自东方之谓也。"④这里的"阿尔朱巴尔"亦即法文algebre的音译，今译为"代数学"。西方的代数学起源于阿拉伯数学，欧洲人可说来自东方，但不是来自中国，因此，这里的"'原系中国算法'是有问题的"⑤。

---

① 白晋．康熙皇帝．赵晨译．哈尔滨：黑龙江人民出版社，1981．35

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．256

③ 王先谦．康熙四十三．见：东华录

④ 王先谦．康熙八十九．见：东华录

⑤ 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．257

## 第二节　康熙帝的数学观

由上一节知道，康熙帝因受杨光先事件启发，萌生了学习科学技术知识的念头，特别对数学和天文学情有独钟。到了中年，康熙帝的数学天文学研究达到较高水平，这种成绩的取得自然与他的刻苦钻研有关。另外，也与他对数学的认识有着密切关系。他的数学观点表现在以下几个方面。

1. 数学与哲学有密切联系。我们知道，数学是研究现实世界空间形式与数量关系的一门科学；哲学是关于世界观的学说，它是自然科学与社会科学的概括与总结。数学与哲学是有着密切联系的。康熙帝在学习和研究数学时注意把数学与哲学结合起来讨论，认为《易经》是通过数来阐述哲学理论的。他与大臣讨论数学问题时曾说："算法之理，皆出于《易经》。"①又说："尔曾以《易》数与众讲论乎？算法与《易》数吻合。"②康熙帝还把数学原理与我国古代传统的理学加以比较。有一次他对大学士李光地说：

"朕凡阅诸书，必考其实，曾将算法与朱子全书对较过。今人看正书者少，宋儒讲论性理亦未曾不作诗赋，但作诗赋皆醇厚，朱子以苏轼所作文字偏于粉饰，细阅之果然。"③

某些性理学说，他认为对实际应用有一定价值，于是接着又说："若看圣贤讲论性理诸书，虽赋性鲁钝，及至日就月将定有裨益。"④康熙帝还进一步讨论数学与哲学的相互影响，他说："理深者太过而不明，数学不及而未必得理，各涂各作，不能合而为一。"⑤这就是说，理深时，没有数就不能表达清楚；数学表达跟不

---

① 清圣祖实录．卷二四五

②③④ 清圣祖实录．卷二五一

⑤ 清圣祖实录．卷二五一；卷二四五

上去的话，则不能理解事物的变化之理。这里体现了康熙帝的“数只有在能表达事物之理时，才能体现数学的神妙，而事物之理也只有附着于一定的数(量)时，才能通达明显”[①]的数与理相互依赖关系的深刻哲学思想。

2. 数学理论与实际应用相结合。上一节我们谈过，康熙帝让南怀仁给他讲几何学以及数学和天文学仪器使用方法，后又让白晋、张诚讲欧几里得的《几何原本》。他的学习态度非常认真，亲手绘图、反复练习，很快“精通了几何学原理，取得了很大进步”。康熙帝很重视数学应用于实际，因而，“殷切表示要在尽可能快的时间内知道几何原理最必要的部分，以求弄懂实用几何学”[②]。这样，促使张诚等“只讲最必要最有用的定理，……改用巴蒂氏的《实用和理论几何学》作教本”[③]。学完这些知识以后，康熙帝还让张诚与他一起，应用几何仪器和原理“测量土地的高低远近和星宿的距离”。另外，康熙帝还在举朝大臣面前对“几何学大部分作了实际应用”[④]表演。康熙帝利用数学理论解决实际问题时，计算的精确度很高，例如测量复杂形状的面积及谷物体积，常常是“事先的理论测算与事后的实际丈量没有误差”[⑤]。

康熙帝还把数学知识应用于政务。康熙三十八年(1699年)三月，康熙帝第三次南巡，行至苏北高邮时利用学到实用几何知识和测量方法，亲自动手作水平测量，发现运河比高邮湖水面高四尺八寸，立即指示运河总督于成龙“着差贤能官员，作速查验修筑”[⑥]。因为运河水高出湖面容易倒灌，造成湖岸决堤，酿成水患。

康熙帝非常重视数学在天文历法研究中的重要作用，强调：

---

① 宋德宣．康熙思想研究．北京：中国社会科学出版社，1990．176

②③④ 张诚．张诚日记．陈霞飞译．北京：商务印书馆，1973．74～79

⑤ 潘吉星．爱新觉罗·玄烨．见：杜石然编．中国古代科学家传记．北京：科学出版社，1993．1050

⑥ 清圣祖实录．卷一九二

"古人璇玑齐七政，表度准南北，察两至明太阳之回转，识二分为寒暑之变迁。日月星辰交食凌犯，人差清濛地气之考，苟非测量，难得其详。有测量而无推算，势不可成。"① "历本于测量，终于推算。"②康熙帝在历法测算中达到相当高水平。1690 年 2 月 28 日（夏历二月初一），康熙帝与张诚分别测得这天应出现日食，于是率内院大臣前往观象台察看，果然应验。又如 1689 年，他南巡至江宁府，根据当地北极出地高度研究老人星(Carinaα)出没问题，怀疑《辽史·穆宗纪》关于辽都临潢府(在热河境内)观测到老人星的记载的可靠性，从而纠正了这一错误③。

康熙帝认为，数学是现实生活中事物变化规律的反映，如果数学不能应用于实际，或者与实际不符合，就不能盲目承认它的正确性，纵然是一些权威人士所言，也要分析对待。他曾严厉批评熊赐履盲从古人的错误，说：

"熊赐履言算法，皆踵袭宋人旧说，不自知其非是，且人纵知径一围三之误，若以此语人，必群起而非之，以为宋人既主此论，不可不从。究竟试诸实用，一无所验。……前人所言，岂能尽当，径一围三之法，推算不符，虽蔡元定之言，何可从也。"④

康熙帝这种不拘泥古法，用实践来检验数学理论正确与否的精神，是他深入钻研数学有成就的一个重要原因。身为一国之君，以他的权力及这种思想影响，致使清初年间数学以及整个科学事业再度繁荣活跃，是很正常的。

康熙帝也认识到数学理论应用的广泛性。在日常生活中，小至人们的衣食住行，大至国民经济发展，治国安邦以及天文地理、

①② 御制文集(第三集). 卷十九

③ 潘吉星. 爱新觉罗·玄烨. 见：杜石然编. 中国古代科学家传记. 北京：科学出版社，1993. 1049～1050

④ 见《张玉书文集》。

音乐等都要用到数学计算，因而，不管是庶民百姓，或是至尊皇上，都要认识到数学理论应用的重要性。他曾不止一次地强调这一点，康熙乙未年(1715 年)曾对大臣们说："朕所谕数者，俱与世道人心，大有关系，尔等皆宜识之。"①

3. 数学理论的客观性和推理的严密性。数学理论是客观现实世界事物变化规律的正确反映，对此，康熙帝已有较正确认识，乙未年(1715 年)对领侍卫内大臣等说：

"朕常讲论天文、地理及算法、声律之学，尔等闻之辄奏曰，皇上由天授，非人力可及。尔等试思，虽古圣人岂有生来无所不能者，凡事俱由学习而成务，学必以敬慎为本，朕之学业皆从敬慎中得来，何谓天授非人力也。"②

这里的"敬"就是尊重科学的客观性，"慎"就是以一丝不苟的严谨态度对待科学。只有持这种态度才能把数学理论乃至整个科学真正掌握好，绝非不费力气地从"天授"可得。这反映了康熙帝朴素的辩证唯物主义世界观，反对给科学理论加上神秘的色彩。

数学是在概念、定义和公理基础上运用逻辑推理方法导出的一整套理论，包括定理、公式和法则等，是非常严密的，对此，康熙帝也有清醒的认识。历法推算是数学理论的一个重要应用，历法推算精度的不断提高就是数学推理逐步严密化的具体体现。康熙五十年(1711 年)十月，他说：

"天文历法朕素留心，西法大端不误，但分刻度数之间积久不能无差。今年夏至，钦天监奏午正三刻，朕细测日景是午初三刻九分，此时稍有舛错，恐数十年之后所差愈甚，犹之钱粮微尘秒忽，虽属无几而总计之便积少成多，此事实有证验，非比书生论

①② 清圣祖实录．卷二六二．康熙五十四年

说，可以虚词塞责也。”①

这就是说，历法推算非常严密，是否与天象符合就是测算推理正确性的检验标准，要严肃认真对待，不同于搞文字创作，可以形象构思，任意美化和修饰。

4. 数学是不断发展和完善的。随着社会的发展和人类进步，生活实践中不断提出许多新的数学问题，因而促使数学科学研究内容充实、扩大，研究方法逐步深化完善，康熙帝对此有一定认识，曾说：

“（朕）曾讲古法新法，故知其概。古法推算冬至，及日月交食，多用积数，因数多奇零，盈缩虚实之难明，不能合于天。新法多用余数，及濛气差之类，又验于测影，故较之古法仅能与天象相合。”②

这里主要是比较编制历法的古法与新法优劣，康熙帝是从数学的角度来分析评价的。对于二者的粗精、差误与精确度，其差别原因，除了观测仪器的精确度外，几乎与数学方法的逐步深化完善有密切关系。康熙时代使用的《时宪历》已比明代所采用的《大统历》精确得多，这主要是吸收了许多西洋传入的推算历法的新数学方法。康熙帝在这里说明新法优于古法的数学根据是采用“余数”比采用“积数”的数学方法先进，从而反映了他认为数学是不断发展的观点。

5. 三角形是几何学中最基本和最有实用价值的图形。几何学是研究空间图形的形状、大小和位置的相对关系的科学。欧几里得几何学与中国传统几何学，虽然在结构上不同，前者“有一套

① 清圣祖实录．卷二四八．康熙五十年

② 御制文集（第二集）．卷二十六

逻辑演绎程式，主要是证明，不讲究计算”①，后者“有一套规格化的计算程式，主要是计算，不讲究逻辑证明”②。但是，几何学知识在实践中得到广泛应用这一点是世人皆知的。康熙帝不仅掌握了丰富的几何学知识，同时还对天文历法、地图绘制等测量工作都十分了解。康熙年间，清政府进行了大规模的大地测量，绘制了《皇舆全览图》。因为三角形本身具有刚性，并且在测量中主要使用三角测量方法，所以他认为三角形是一种基本图形，曾说：

“用仪器测绘远近，此一定之理，断无差舛，万一有舛，乃用法之差，非数之不准。以此算地理算田亩，皆可顷刻立辨。但须细用功夫，方能准验，大抵不离三角形学。”③

康熙认为三角形是最有实用价值的，他说：“三角者圆方众角之尽，精微易晓，舍此而他术，必至混杂，历不可成矣。”④康熙帝还对三角形进行过系统研究，写成一本书《三角形论》，并题“康熙御纂”。由此可以知道康熙帝对三角形的重视程度以及所取得的研究成果。

几何图形大抵分为直线形和曲线形两种，研究几何图形的性质，大都化多边形为三角形，多面体借助于多边形，曲面体则用多面体的极限去逼近，三角形在几何学中的基础地位是显而易见的。康熙帝认为三角形是几何学中的基本图形，这是他深入研究几何学所得出的正确结论；肯定三角形的应用价值则是基于康熙帝数学应用于实践的思想。

6. 形数结合的数学研究方法。我国古代数学家非常注意形数结合的数学研究方法，许多数学家都认为形和数是统一的，是中

---

①② 李迪.《九章算术》与《几何原本》. 见：吴文俊编.《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982. 106

③ 御制文集(第三集). 卷三

④ 御制文集(第三集). 卷十九

国的传统思想，清初吴学颢曾有一段有关的论述，他说：

“凡物之生有理有形有数，三者妙于自然，不可言合，何有于分顾。……尝窃论之，理为物原，数为物纪，而形为物质。形也者，理数之相附以立者也。得形之所以然，则理与数皆在其中，不得其形则数有穷时而理亦杳茫而不安，非理之不足恃。盖离形求理，则意与象睽，而理为无用；即形求理，则道与器合，而理为有本。”①

康熙帝在学习数学天文学时，非常重视形数结合方法，白晋说：“皇上(康熙帝)认真听讲，反复练习，亲手绘图。”学习立体几何时，又“将同样之圆筒形、圆锥形、楔形之比例或容积，反复实验之”②。这种学习方法行之有效，进步很快，以致于“看到某个定理的几何图形，就能立即想到这个定理及其证明”。

康熙帝的这种形数结合学习研究方法对后来编纂大型历算律吕书《律书渊源》中的《数理精蕴》有一定影响。如该书上编《几何原本》译自法国巴蒂的原著，但编译者增加了许多图示；下编卷十八“新增按分作相连比例四率法”采用图示说明三次方程的具体解法；下编卷三十一“借根方比例”中还用图示解释多项式乘法的几何意义等，“这是别具特色的”③，而且对于读者阅读能起到一目了然的作用。

---

① 吴学颢．几何论约·原序．见：四库全书(八〇二册)．上海：上海古籍出版社

② 后藤末雄．康熙大帝与路易十四．见：人文月刊，7(5)：5～6

③ 韩琦．数理精蕴提要．见：郭书春编．中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册)．郑州：河南教育出版社，1993

## 第三节　康熙帝与李光地、梅文鼎

康熙帝不仅向传教士学习西洋传入的历算之学，而且还非常注意传统数学天文学的研究和发展情况，虚心向民间历算学者求教。康熙帝与当时被誉为“国朝算学第一”[1]的数学家梅文鼎的交往、切磋学问就是一例。他们之间的交往是通过清朝高官李光地的联系而逐步展开的。

李光地(1642～1718)，字晋卿，号厚庵，谥号“文贞”，福建安溪人。康熙九年(1670 年)进士，改为庶吉士，授编修。康熙十九年(1680 年)任内阁学士，康熙二十五年(1686 年)授翰林院掌院学士，康熙二十八年(1689 年)改通政使，同年擢兵部右侍郎，康熙三十三年(1694 年)提督顺天府学政，康熙三十六年(1697 年)授工部左侍郎，康熙三十七年(1698 年)授直隶巡抚，康熙四十二年(1703 年)补授吏部尚书，康熙四十四年(1705 年)陞文渊阁大学士。1723 年雍正帝追恤为圣祖朝宣力效忠大臣，赠光地太子太傅[2]。

李光地是清圣祖时代的名臣，由于政绩突出，深受康熙帝赏识，并提拔重用，康熙四十二年(1703 年)四月曾谕：“李光地自任直隶巡抚以来，每年雨水调顺，五谷丰登，官吏兵民无不心服。”[3]下诏“即令补授(吏部尚书)，仍管直隶抚事”[4]。

李光地又是当时的一位著名学者，主要从事程朱理学研究，曾奉旨主编《朱子全书》、《周易折中》、《性理精义》等书，自己著有《榕村全书》、《榕村语录》等，其中自著《榕村日记》流传至今。他受家庭影响，幼年学习过数学天文学，以后也留心研究，但

① 阮元．钱大昕．见：畴人传．卷四十九

②③④ 蔡冠洛．清代七百名人传．北京：中国书店，1984．11～23

这方面的著作不太多，著有“记四分术”、“记浑仪”、“记太初历”、“记星书”等短文①。他的著作《历象本要》收入《李文贞公全书》中，目前对该著作的作者问题尚有争议，“可能是在李光地初稿基础上由杨文言修改完成的”②。

李光地余暇时间研究中国传统数学天文学与西方传入的数学天文学，非常刻苦，达到“伏读沉思，至忘寝食”③的惊人地步，并且还虚心学习，“博访宿学明师”④，天长日久，取得一定成果“久而有得”⑤。他的主要研究方向是“我国传统天文学与近代西方天文学的比较”，在深入发掘中国传统天文学思想，整理研究中国传统天文学方面作出一定贡献。他的古老“天圆地方”说辨析，在今天仍有一定意义，传统地圆思想考释，实开中国后世研究中国传统地球思想之先河；重建《周髀算经》天文体系方面，提出了以《周髀算经》为体，以西方天文学为用的浑盖合一说⑥。

康熙帝为了改变举朝百官无一通历法者的状态，一方面精心选拔，专门培养历算人才，另一方面不断给大臣们讲解天文学知识，以期引起对天文历法工作的重视和学习。康熙帝与李光地曾多次讨论天文学和数学，对此曾有一段记载：

“圣祖幸观星台，……问汉臣中有知天文者否？皆奏曰：‘臣等未能通晓。’乃问掌院学士李光地：‘尔所识星宿几何？’李光地奏曰：‘二十八宿臣尚不能尽识。’圣祖因令指其所知者。又问古历觜参，今为参觜，其理云何？李光地奏曰：‘此理臣殊未晓。’圣祖曰：‘以观星台仪器测之，参宿至天中，确在觜宿之先，观此足

---

① 李光地. 见：清史稿. 卷二六二

② 郭世荣. 李光地对梅文鼎学术研究的支持与促进. 见：李迪编. 数学史研究文集(第二集). 呼和浩特：内蒙古大学和台湾九章出版社

③④⑤ 阮元. 李光地. 见：畴人传. 卷四十

⑥ 贺威. 试论李光地的中国传统天文学. 见：自然科学史研究，1995，14(3)：205～214

信今历之不误矣！'又问：'尧时中星今移几度？'李光地奏曰：'据先儒言，已差五十余度。'圣祖又问：'恒星动否？'李光地奏曰：'臣不能知，惟新历言，恒星天亦动，但其动微耳。'圣祖曰：'郭守敬仪器不可行于今，由不知恒星天动故也。自来史志历法多不可信，质之以理，类空言无实，如荧惑退舍之说，天象垂戒，理则有之，若果退舍，后来推算者如何积(计)算?!'圣祖又历指三垣星座，问李光地。(李光地)不能尽举其名。圣祖指示从官，历历明析。尚书张玉书、图纳等奏曰：'皇上聪明天纵，观文察理，诚非愚臣所能仰窥也。'圣祖又披小星图，按方位，指南方近地大星，谕诸臣曰：'此老人星也。'李光地奏曰：'据史传谓，老人星见，天下仁寿之征。'圣祖曰：'以北极度推之，江宁合见是星，此岂有隐见也!?'"①

这段文字说明康熙帝天文学知识渊博，颇有见地，另一方面也表现李光地在天文历法研究上有较高造诣。

李光地为官清廉勤政，研究学问态度严谨，并取得一定成绩，康熙帝对此给予较高评价。李光地于康熙五十七年(1718 年)五月卒于任上，终年七十七岁。当时康熙帝驻跸热河，得到这一噩耗"深为悯悼"，并指示：

"李光地久任讲幄，简任纶扇，谨慎清勤，始终如一，且学问渊博，研究经籍，讲求象数，虚心请益，知之最真无有如朕者，知朕亦无有过于李光地者。赐祭葬如典礼，谥曰文贞。"②

我们已在第二编第二章专事介绍梅文鼎的业绩。他的这些学术成就的取得与许多学者的交往、支持和帮助是分不开的，其中以李光地对他的影响最大。李光地身为清朝名臣，帮助梅文鼎出版著作，宣传学术成就，尤其是推荐给对科学技术有浓厚兴趣的

---

① 章梫．康熙政要卷十八．引《东华录》四十三

② 蔡冠洛．清代七百名人传．北京：中国书店，1984．22

康熙皇帝，对其社会地位的提高、知名度迅速增大起了非常重要的作用。

梅文鼎29岁时师从同里倪观湖先生学习历算，写出第一部历算著作《历算骈枝》，从此与天文历算之学结下不解之缘，先后有多部著作出版问世。李光地与梅文鼎最初交往可以说与梅氏著作《方程论》刊刻出版有关。该书于1672年完成初稿，虽然受到吴江潘耒支持并为之写序，又受到同里阮于岳好评，准备付资刊刻，但未成功，直到1687年，也就是过了15年才由李鼎征资助在泉州刻版印刷。李鼎征，字安卿，李光地的次弟，举人出身，曾任嘉鱼府令。《方程论》一书刻刊出版，梅文鼎当然非常高兴，并写了四首诗表达对李安卿的敬佩、赞誉与感激之情[①]，其中第一首是：

草玄期众赏，当世几桓谭。
岂伊文奥艰，抑亦性匪耽。
君子绍家学，优游六籍酣。
曾不让土壤，而同癖嗜甘。
淡泊味能咀，隐赜理深谙。
重以雕版良，校仇勤再三。
荆璞剖顽石，负之出烟岚。
干镆拭华阴，光怪发蕴函。
何以答明贶，耿耿意中含。
千里寄遥思，需月高秋涵。

从此，梅文鼎与李氏家庭建立起密切关系。李光地是著名学者，“本人很喜欢天文历算，通过弟弟了解到梅氏的情况，愿意与

① 梅文鼎．李安卿孝廉刻余《方程论》于安溪古诗四章寄谢．见：绩学堂诗抄．卷四

他会见是理所当然的”[1]。

1689年，已是57岁的梅文鼎进入北京，受到李光地的热情接待，“公(李光地)闻而先之，且设馆焉”[2]。梅文鼎在李光地家中抓紧分秒刻苦钻研学问的动人情景给李光地留下非常深刻的印象，曾说：

“梅定老(文鼎)客予(李光地)家，见其无一刻暇，虽无事时掩户一室中如伏气，无非思历算之事。算学中国竟绝，自定老作九种书(筹算、笔算、度算、三角形、比例法、方程论、勾股测量、算法存古、几何摘要)。而古法竟可复还三代之旧，此间代奇人也。历书有六十余种，不能刻，七十二家之历，无不穷其源流而论之，可谓集大成者矣。”[3]

这里虽然字数不多，却道出李光地对梅氏刻苦治学精神的敬佩之情，并对他的学术成就给予充分肯定。

梅文鼎在北京结识了许多新朋友，获得不少新资料，开阔了视野，又得到李光地的大力支持，因而使其学术研究进入一个新阶段，取得许多成果。在北京的5年间，梅文鼎完成了《王寅旭书补注》、《明史历志拟稿》、《几何补编》、《少广拾遗》、《笔算》、《历学疑问》等著作，其中最后一部就是根据李光地的建议，采用问答形式写成的。

梅文鼎一生著述宏富，约有101种[4]，到1699年时就有80种，但刊刻的较少，他希望能得到社会上有识之士给予帮助，出资雕版。李光地出于对科学事业的支持，又有较高的社会地位，对梅

---

① 李迪，郭世荣．清代著名天文数学家梅文鼎．上海：上海科学技术文献出版社，1988．30

② 梅珏成．历象本要·序．1742

③ 转引自：李俨．中算史论丛(第三集)．559

④ 李迪，郭世荣．清代著名天文数学家梅文鼎．上海：上海科学技术文献出版社，1988．52～58

氏书籍刊刻作出了很大贡献，经李光地之手出版的著作有《历学疑问》、《平三角举要》、《弧三角举要》、《堑堵测量》、《环中黍尺》、《交食蒙求》等，可以说，“李光地是梅氏生前为他刻书最多的人”①。

康熙四十二年(1703 年)二月，康熙帝赐给李光地《几何原本》和《算法原本》两书，李光地不是数学家，对书中某些内容看不懂，“未能尽通”。他为了彻底弄通这两本书，此时想到了挚友梅文鼎，请到保定直隶巡抚署中，为其开设学馆。这次随梅氏北上的还有兄弟梅文鼐尔素，儿子梅以燕正谋以及孙子梅珏成玉汝等。李光地让其弟弟李鼎征、儿子李世得等和他们共同讨论问题，互相学习。当时投其门下的人很多，除了学习康熙帝赐的书之外，梅文鼎还和他们讨论各种天算问题，学术气氛相当浓厚，收获也很大。后来梅文鼎回忆这段经历时曾说：

“安溪相国(李光地)以家宰开府上谷，公子世得孝廉钟伦锐意历算之学，余兄弟及儿以燕下榻芝轩，与诸同学晨夕问难，甚相得也。”②

这里所说的诸同学指的是景州魏廷珍、交河王兰生、河间王之锐、晋江陈万策、宿迁徐用锡等，皆为当时著名学者。在此期间，梅文鼎不仅教出许多学生，而且教学相长，自己也学到不少东西，其中李世得问及的垛积招差术一题就使梅文鼎颇费思考，有不少心得，然后让孙子梅珏成“衍为垛积之图”，写成《平定立三差详说》一书。1706 年，梅文鼎从保定返回宣城故里，此前弟尔素和儿以燕先后离开，唯珏成一直留在身边，是他的得力助手。

对于梅文鼎较高的天文历算学造诣，康熙帝早有耳闻，早在

---

① 郭世荣. 李光地对梅文鼎学术研究的支持与促进. 见：李迪编. 数学史研究文集(第二集). 呼和浩特：内蒙古大学和台湾九章出版社. 93

② 梅文鼎. 比例规用法假如序

1692 年时就曾提到过梅文鼎的名字。这一时期，正是康熙帝热心钻研西方传入数学天文学，并在科研上取得一定成绩的高峰时期，又恰值中年，治理朝政也趋于成熟。为推动大清科技事业发展，培养人才，他经常和大臣们在乾清门外讨论历算问题，但大臣们大部分都不懂，因而经常出现答不上来的尴尬局面。譬如，这一年的一天，在场讨论天算问题的大学士熊赐履(1635～1709)等僚阁就回答不上来。康熙帝很恼火，说："你们这些汉人全然不晓得算法，惟江南有个姓梅的他知道些。"[①]这里所说的梅当然是指梅文鼎。不管是李光地从其弟弟那里了解到梅的情况奏给皇上，还是梅已刊刻著作通过其他渠道传到康熙帝那里，均说明精通历算之学的梅文鼎在社会上已有一定声望。

梅文鼎的著作真正传到康熙帝手中，有据可考的记载是康熙四十一年(1702 年)十月。此时正值康熙帝南巡，李光地应诏随驾乘舟一同沿运河航行。康熙帝在德州驻跸，传旨李光地取所刻书集回奏。康熙帝对西方传入数学天文学产生浓厚兴趣，但社会上对待西学的态度有两种，既有赞成，又有反对，众说纷纭，莫衷一是。梅文鼎的《历学疑问》正是从学术争鸣的观点阐释"西学中源说"的，符合康熙帝的心理，因此，光地趁机将此书进呈。康熙帝对此书很重视，非常赏识，并且很自信地说："朕留心历算多年，此事朕能决其事非。将书留览，再发。"[②]康熙帝当天就认真阅读，第二天对李光地说："昨所呈书，甚细心，且议论亦公平。此人用力深矣！朕带回宫中，仔细阅读。"[③]李光地想请求康熙帝给以裁定，于是便回答："臣因求皇上亲加御笔批驳改定，庶草野之士，有所取裁。臣亦得以预闻一二。不胜幸甚。"康熙帝已有此意，第

① 王先谦．康熙四九．见：东华录；李光地．理气．见：榕村语录续集．卷十七

②③ 李光地．恭记．见：梅文鼎．历学疑问・卷前．1704

二年(1703年)春，再次南巡，途中把书交回李光地，还在其上注有批语，画上圈点。李光地随即问："此书疵谬所在?"[①] 康熙帝给予正确评价："无疵谬，但算法未备。"[②]李光地想利用皇帝的评语来宣传梅文鼎的学术成就，为此，特为该书写了"恭记"真实记述了该书的进呈经过和康熙帝的看法。

康熙帝对梅文鼎的学术成就很赞赏，总想见面叙谈。康熙四十四年(1705年)，康熙帝又一次南巡，问李光地："宣城处士梅文鼎今安在?"[③]光地回答说："尚在臣署。"[④]康熙帝说："朕归时，汝与偕来，朕将面见。"[⑤]农历四月十九日(公历5月11日)，李光地与梅文鼎一块到运河边，二十日，康熙帝在临清运河御舟上，然后由小黄门送归所乘小舟随行，二十二、二十三，一连三日"并赐召对、赐食、赐坐、夜分乃罢"[⑥]。在御舟中"从容垂问"[⑦]赐御书、扇幅等物。通过当面交谈，康熙帝对梅文鼎的学术水平有了进一步了解，确实有真才实学，于是对李光地说："天象算法，朕最留心，此学今鲜知者，如梅文鼎实仅见也，其人亦雅士。惜乎老矣!"[⑧]康熙很想让他为国家的天算事业再作贡献，很遗憾，"惜乎老矣"!。虽然如此，这为后来康熙帝重用梅文鼎之孙梅瑴成奠定了坚实的思想基础。当随行到天津以北的杨村时，与梅文鼎分别。为表彰他在天文数学方面的卓越成就和刻苦钻研为科学献身精神，临别时，康熙帝特赐"绩学参微"四个大字。一个普通民间钻研历算之学的知识分子，能够受到皇帝的亲自接见，并讨论学术问题，获此殊荣，在历史上也是罕见的，这对于提高梅文鼎的社会地位，促进科学研究工作深入进行，无疑将起到非常重要的作用。

---

①② 李光地. 恭记. 见：梅文鼎. 历学疑问·卷前. 1704

③④⑤⑥⑦⑧ 梅文鼎. 赋德. 见：绩学堂诗钞. 卷四；杭世骏. 梅文鼎传上；文峰梅氏宗谱

## 第四节　康熙帝与《数理精蕴》的编撰

《数理精蕴》是康熙年间编写的“初等数学全书”[①]，就其资料来源而论，“从整体上说是西方数学著作的编译作品”[②]。这部宏篇巨著是康熙帝根据数学工作者的建议，下诏开馆，历时9年编纂完成的，雍正元年(1723年)刻竣。

自从明朝末年耶稣传教士东来，西方数学天文学知识开始陆续传入中国，并产生很大影响。这些知识大都收入徐光启等人编辑的《崇祯历书》及李之藻编辑的《天学初函》之中。这两套丛书编成不久明朝便灭亡，因而，除个别书，如《几何原本》外，总的说来，研究者不太多，传播不广。入清以后，梅文鼎曾研究过，然而其著作大部分在康熙以后才刊刻。另外，这些西方数学天文知识都是通过译著的媒体传入的，但由于“译书者识有偏全，笔有工拙”[③]，因而所译之书有许多难懂之处。就连梅文鼎这样著名的数学家对徐光启、利玛窦合译的欧几里得《几何原本》前6卷也有“行文古奥而峭险，学者多畏之”[④]的评论。加之此书后9卷到康熙晚年的近百年时间内仍未译出，内中许多知识在历法书中常被引用，然而读者却不详其理论根据。在这样情况下，对已传入的数学天文学知识加以全面系统整理，势在必行。康熙帝本人酷爱数学天文学，且有一定成就，加之皇权在握，因此，康熙年间编辑《数理精蕴》是非常必要的，也是完全可能的。

《数理精蕴》是巨型乐律历算丛书《律历渊源》之一，其他两

① 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 265

② 韩琦. 《数理精蕴》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册). 郑州：河南教育出版社，1993. 3

③④ 转引自：中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986. 390

部分别为历法书《历象考成》和乐律书《律吕正义》。编写《律历渊源》的建议首先由学者陈厚耀提出，被康熙帝采纳。在此之前，清廷曾在全国遍访，征召精通历算、乐律及其他学有专长的人才，委以重任。康熙四十五年(1706 年)，大学士“李光地荐苏州府学教授陈厚耀通天文算法，引见致内阁中书，圣祖试以算法”①。康熙帝对待学术问题的态度严肃认真，让陈厚耀绘制三角形图，要求计算其中线之长并回答有关弧以及弧所对弦等问题的计算方法等。厚耀回答干脆利落，皇上非常满意。不久，陈厚耀返乡省亲，并于 1708 年“特命来京”②。1709 年，康熙曾诏见过陈厚耀，同他讨论数学问题。后来陈厚耀向康熙帝提出请求“定步算诸书，以惠天下”③，康熙帝很快采纳了他的意见，并说：“汝尝言梅珏成学甚深，今命来京，与汝同修算法。”④

康熙五十一年(1712 年)，清政府在畅春园蒙养斋开馆编修律历算法等书，此项工程浩大，由皇三子诚亲王允祉主持。康熙帝对此事非常关心，多次谕和硕诚亲王允祉：

“律吕算法诸书，应行修辑，今将朕所制律吕算法之书发下，尔亲率庶吉士何国宗等于行宫内立馆修辑。”⑤

修辑这样大型书籍，除了消耗大量资金外，更重要的是还要有许多精通历算和乐律知识的科学家参与。于是，康熙帝用考试的办法选拔人才。康熙帝谕和硕诚亲王允祉等：“修辑律吕算法诸书，于蒙养斋开馆，开考定坛。”⑥康熙帝对入馆人员学术水平要求很严，即使有一定水平，也要把关。当时有举人照海等 45 人，均为学算法的，但还需“再加考试，其学习优者，令其于修书处行

---

① 章梫. 康熙政要. 卷十八

②③④ 阮元. 陈厚耀. 见：畴人传. 卷四十一

⑤ 同①。

⑥ 清圣祖实录. 卷二五六. 康熙五十二年

走"[①]。

康熙帝深知数学天文学是非常精确严密的科学，学习研究时不可粗心马虎，修书撰文更需字斟句酌。前面已经说过，康熙五十年(1711 年)，他发现钦天监所奏当年夏至时刻为午正三刻，与自己所测午初三刻九分稍有差误时，非常担心，"恐数十年之后所差愈甚，犹之钱粮微尘秒忽，虽属无几而总计之便积少成多"。并严肃指出："此事实有证验，非比书生论说，可以虚词塞责也。"为了做好历算工作，康熙帝又谕礼部"考取效力算法人员"，还"临轩亲试取顾琮等四十二人"[②]。

受征和考取的懂历算学者聚集畅春园，声势浩大，据说当时在蒙养斋编书的人员很多，"人数在百人以上"[③]。在馆供职的著名学者，除前面提到的陈厚耀、梅瑴成、何国宗外，尚有明安图、方苞、魏廷珍和王兰生等。

康熙帝在数学天文学方面有深厚的功底，经常给这些学者教授历学算法知识。例如，对陈厚耀"尝召至御座旁，教以几何算法"。[④] 又说："朕将教汝，汝其细心贯想，以待朕问。"[⑤]对何国宗则是"以算学受知圣祖仁皇帝"[⑥]。明安图"受数学于圣祖仁皇帝，故其所学精奥异人"[⑦]。而梅瑴成则"肄业蒙养斋，以故数学日进"[⑧]。这些学者学习刻苦努力，工作踏实勤奋，因而进步很快。康

① 清圣祖实录．卷二五六．康熙五十二年

② 时宪志一．见：清史稿．卷四五

③ 韩琦．《数理精蕴》提要．见：郭书春编．中国科学技术典籍通汇・数学卷(第三分册)．郑州：河南教育出版社，1993．3

④ 蔡冠洛．清代七百名人传．北京：中国书店，1984．1722

⑤ 阮元．陈厚耀．见：畴人传．卷四十一

⑥ 阮元．何国宗．见：畴人传．卷四十一

⑦ 阮元．明安图．见：畴人传．卷四十八

⑧ 阮元．梅文鼎下・孙瑴成．见：畴人传．卷三十九

熙帝对他们的进步和取得的成绩给予表扬和肯定。如当梅瑴成应召到北京晋见时，康熙帝对他说："汝知陈厚耀否？他算法近日精进。向曾受教于汝祖(梅文鼎)，今汝祖若在，尚将就正于彼矣。"[①] 康熙帝对这些学者的工作给予支持，还提供许多方便，赐梅瑴成、陈厚耀《算法原本》、《算法纂要》、《同文算指》、《嘉量算指》、《几何原本》和《周易折中》等参考书籍，以及研究工具西洋测量仪器、字典等，就连写字用的金扇松花石砚以及瓜果等常备食品都考虑到，一应俱全。

康熙五十一年(1712 年)五月，康熙帝去热河避暑山庄，把陈厚耀、梅瑴成、何国宗、何国宗兄弟何国栋、官学生明安图、原任钦天监监副成德都带去。这次到热河的主要目的显然是商讨《律历渊源》编写的有关问题。康熙帝与诸学者之间的关系很和谐，气氛宽松，"上(康熙帝)亲临提命，许其问难，如师弟子"[②]。从热河返回北京后继续编写，第二年写成[③]。然而，"这部书没有留传下来，内容不详"[④]。康熙五十二年(1713 年)五月，又"修律吕、算法诸书"[⑤]，由和硕诚亲王允祉、皇十五子允禑、皇十六子允禄充承旨纂修，何国宗、梅瑴成任汇编(相当于主编)，陈厚耀、魏廷珍、王兰生、方苞担任校对，分别校对各书。康熙帝对该书的撰写非常关心，亲自过问，"所纂之书，每日进呈，上亲加改正焉"[⑥]。

康熙五十三年(1714 年)四月，康熙帝对书的整体结构作了重要指示，对和硕诚亲王允祉说："古历规模甚好，但其数目岁久不合。今修书宜依古历规模，用今之数目算之。"[⑦]同年十月，康熙帝又指示："北极高度，黄赤距度最为紧要，着于澹宁居后，逐日测

① 阮元．陈厚耀．见：畴人传．卷四十一

②③⑤⑥⑦ 时宪志．见：清史稿．卷四五

④ 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．266

量。”①

康熙五十三年(1714年)十一月，御制《律吕正义》完成，进呈康熙帝，得旨：“律吕、历法、算法三书著，共为一部，名曰《律历渊源》。”②

和硕诚亲王允祉身为承旨纂修，对于整个编书之事，每遇重大问题，总要上疏，请求康熙帝圣旨。康熙五十三年岁末，允祉奏本，言昔日郭守敬编历书时，派人到各省去实测日影，因此，历书与天象比较密合。今编历书，除了畅春园和观象台逐日测验外，亦不必各省都去测量，惟有里差之尤较著省份，如广东、云南、四川、陕西、河南、江南、浙江七省派人测量北极高度及日影。这样，东西南北里差及日天半径都有实测数据。康熙帝阅罢，觉得很有道理，就传旨：“广东著何国栋去，云南著索柱去，四川著白映棠去，陕西著贡额去，河南著那海去，江南著李英去，浙江著照海去。”③

由于工程浩大，在《律历渊源》编写过程中需要不断补充人员。康熙五十八年(1719年)，因推算人员不够用为由奏本，康熙帝敕礼部“录送蒙养斋，考试取傅明安等二十八人，命在修书处行走”④。

康熙六十年(1721年)，御制算法之书完成，“赐名《数理精蕴》”⑤。康熙帝对此书的质量要求很严，做到万无一失，要找一位学术水平最高的著名学者审校，这时他想到梅珏成的祖父梅文鼎，说：“此书赐梅文鼎一部，悉心校对，遣其孙梅珏成赍书赐之。”⑥这是康熙帝给梅珏成第二次探亲假，返回故里宣城省亲。此时，梅文鼎已89岁高龄，而且抱病在身，恐怕无力校审书稿。当年，便

① 时宪志一. 见：清史稿. 卷四五

②③ 清圣祖实录. 卷二六一. 康熙五十三年

④⑤⑥ 同①。

结束他一生孜孜不倦奋斗的学术生涯，与世长辞。

康熙六十一年(1722 年)六月，《律历渊源》全书告成，共 100 卷，其中《历象考成》上、下编，42 卷，《律吕正义》上、下编，续编，共 5 卷，《数理精蕴》上、下编，共 53 卷。雍正元年(1723 年)九月，该书全部刻竣出版。

康熙帝对参与这一工程的有功人员给予嘉奖。例如，梅珏成在该书编写过程中成绩突出，康熙帝多次赐给他较高荣誉。康熙五十二年(1713 年)，康熙帝赐给他举人出身，相隔一年又赐给他进士出身，还赐住宅在北京宣武门之日南坊，还两次赐假回家省亲。这一举措表现出康熙帝对参与编书学者的关怀和尊重，同时也给全国的学者们树立了典范，这对清初科学事业的发展与繁荣，无疑起到了积极作用。

康熙帝虽然是一国之君，至圣至尊，但对于学术问题的态度是诚恳的。君臣之间，甚至君与布衣百姓之间可以互相讨论，取众家之长。《律吕正义》5 卷完成于康熙五十三年(1714 年)，康熙帝于当年三月七日(公历 4 月 12 日)赐书一部给梅文鼎审核，并由江宁织造李煦送去。当年十二月二十三日(公历 1715 年 1 月 28 日)又谕梅珏成给其祖父写信，转达康熙帝的意见：

“汝祖留心律历多年，可将《律吕正义》寄一部去令看，或有错处指出甚好。夫古帝王有‘都俞吁咈’四字，后来遂止有‘都俞’，即朋友之间亦不喜人规劝。此皆是私意，汝等须要极力克去，则学问自然长进，可将朕此意写与汝祖知道。”①

这里康熙帝使用“都俞吁咈”四字表现出君与臣之间议论朝政大事时问答的轻松、和谐与融洽气氛，同时也表现出康熙帝能够以这种态度对待梅文鼎所提出的正确意见。另外，康熙帝在这里也希望梅文鼎不要有什么思想顾虑，只要书中有问题，尽管提

① 谢赐《律吕正义》劄子. 见：绩学堂文抄. 卷一

出来，这样，学问才能不断长进，学术空气才能够进一步活跃。

《数理精蕴》的出版，标志着明清以来，西算输入告一段落，同时，“也是第二阶段西洋数学传入中国的成果”[1]。

[1] 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 268

# 第二章　《数理精蕴》的内容

《数理精蕴》全书共53卷，分三大部分。上编5卷，“立纲明体”，主要讲全书的基本理论。下编40卷，“分条致用”，主要运用上编的理论和定理，展开全书的主要篇章的论述。最后附数学用表4种，共8卷，以备计算使用。《数理精蕴》内容大体上包括当时传入中国的西洋数学知识，也录有“中国数学家的一些研究成果”①。

本章分“全书的结构与流传”、“算术与数表(笔算)”、“借根方法”、“对几何学的研究”、“测量与物理问题”等五个方面，比较系统地介绍《数理精蕴》的内容。




图 3.2.1 《数理精蕴》书影

## 第一节　全书的结构与流传

### 一、全书的结构

全书的体系为基础理论、实际应用。数学用表只作为附录放在书末。

1. 基础理论部分

---

① 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986. 391

这一部分在全书中所占的比重不大，阐述全书所用的基础理论，总标题为“立纲明体”，下面又细分为三部分。第一部分是卷一，包括“数理本原”、“河图”、“洛书”和“周髀经解”；第二部分是卷二、卷三和卷四之“几何原本”；第三部分是卷五“算法原本”。

“数理本原”说：“粤稽上古，河出图，洛出书，八卦是生，九畴是叙，数学于是乎肇焉。”这段话与明程大位《算法统宗》关于数学起源于“河图”、“洛书”的观点是一致的。秦九韶《数书九章·序》、朱世杰《四元玉鉴·莫若序》、王文素《算法宝鉴》中也有类似的说法，因此，这一观点是宋、元、明、清时期在程朱理学思想影响下产生的，把数学涂上一层浓厚的神秘主义色彩。事实上，《数理精蕴》的主要编纂者梅瑴成晚年在增删程大位的《算法统宗》时也意识到了这一点，认为数字起源于“河图”、“洛书”之说应予以删除。

《周髀经解》开头一段谈到，中国古代传统数学大部分失传问题，“汉晋以来，所存几如一线”，可见相当少。虽然经过后世数学家精心研究，但并不完善，“盖有未尽之余蕴也”。明万历年间，西洋人来华，带来《几何原本》诸书，比较完善一些，但仍有“实未阐明理数之精微”。之后，经过中西数学家的研究，“度数之理，渐加详备”。现在要询问“其所自”，也就是说数学起源在哪里？回答是“本中土所流传”。进而明确回答，古代数学典籍在中国遭秦火，损失，缺佚，而流传到海外的东西才反得其真传，此乃“西学之所以有本也”。这是清初“西算中源说”思想，当然是谬误的。《周髀经解》认为《周髀》首章周公与商高对话成了“周公六艺之遗文”，是不可多得的宝贵数学文献，因而，详加注解，“弁于算书之首，以明数学之宗”。虽然对这段文字“今悉详正”，也就是说下了很大功夫注释，但大多数注解都是很牵强的。

《数理本源》和《周髀经解》两节也认为数学有实际应用价值，

对于“测天地之高深，审日月之交会，察四时之节候，较昼夜之长短以至协律度，同量衡，通食货，便营作，皆赖之以为统纪焉”。然而，由于当时历史条件的限制，这两节文字不可能描绘出中国古代数学理论与实践相结合的辉煌画面。

《几何原本》共分12章，分布在3卷中。卷二包括1～5章，卷三包括6～10章；卷四包括11～12章。第1章分24节，给出点、线、面、体、各种角度以及圆和平行线等基本几何图形的概念或定义。第2章分14节，给出有关三角形的几个定义以及外角、三角形全等判定、边与所对角大小关系等定理。第3章讨论四边形。第4章研究圆与内接或外切正多边形。第5章讨论立体几何问题。第6～7两章讨论量的比例问题。第8章讨论相似形的有关问题。第9章讨论勾股定理以及勾股形和圆中线段等一些量的比例问题。第11～12两章讨论几何学中一类重要问题，即几何作图法。《几何原本》的体例与论证的逻辑严密程度都与欧几里得《几何原本》差别很大，显然前者与后者名同实异，这一点以后我们还要详议。

《算法原本》分两章，第1章又分24节，第2章分36节，主要讨论自然数的性质，包括自然数乘法、方幂、公约数、公倍数、比例、等差数列、等比数列以及如何计算，并附图解。这些内容完全是算术的基本理论知识，书中未深入讨论素数，因而不可能像欧几里得《几何原本》第7～9卷那样深入讨论自然数的性质。

2．实际应用部分

这一部分是《数理精蕴》的主体，大致分为五块。卷一至卷二为首部，卷三至卷十为线部即下编，卷十一至卷二十二为面部，卷二十三至卷三十为体部，卷三十一至卷四十为末部。

前四块内容为实用算术。卷一记述度量衡制度、记数法以及整数的加减乘除运算。四则运算与现代的算法程式相同，但所用的数码一、二、三、四、五、六、七、八、九、十与现代通用的

阿拉伯数码不同。大数和小数的命名方法与程大位《算法统宗》大致相同，只是大数以度量衡为例，而小数分别以度、量、衡为例说明。卷二记述分数运算，约分时用辗转相除法求公约数，通分时一般用分母相乘法求公分母，只是个别情况从简处理，或全部或部分不用分母互乘法。分数的记法与现代记法正相反，分母在上，分子在下，并且不用分数线连为一体。

卷三至卷七讨论比例及其应用中的一般算术问题。卷三是整数或分数的正比例、反比例问题。卷四是“按分递折比例”，主要讲解按连比例不变，或加倍、或减半的比例配分问题。卷五讲“按数加减比例”，相当于比例配分，但分者之间的数目不是按一定比例，而且还多寡不一，这类问题可以利用比例法解决。卷六为“和数比例”与“较数比例”。卷七为“和较比例”。和数比例基本上是一种比例配分问题，较数比例是因数相较成一定比例，而和较比例是利用以上两种方法综合处理。卷八为“盈朒”问题，也就是现在算术中的盈不足或盈亏问题。此卷分为每人多少而盈朒各几何的单法和数人多少而盈朒各几何的双套法，而每一种方法的解答类型又分为一盈一朒、两盈、两朒、一盈一适足、一朒一适足五种，内容全面，解答细致。卷九为“借衰互征”和“迭借互征”。这一卷可以看做是前几卷的综合，从问题类型说，大部分是倍数问题，还有工程、流水、贸易等日常出现的题目；从解答方法上来说，大都归纳为比例配分处理；从难易程度上说，显然其内容又加深了一个层次。卷十为“方程”，主要分和数类、较数类、和较兼用类及和较交变类四种情况展开，最后附法部分给出四个题目，比较复杂，所用方法也是上面几种方法的综合应用。

卷十一为“平方”和“带纵平方”，解决开平方和开带纵平方问题。卷十二、十三为“勾股”，这两卷主要讲解勾股弦和较相求之法，分60种情况，包括的内容相当全面。卷十四为“三角形”，讨论已知三角形的三边求三角形面积、中垂线、形外垂线、内接

正方形边长、内容圆径和外切圆径等问题。卷十五为“割圆”，主要谈求圆内接正多边形和圆外切正多边形周长问题。圆内接多边形的周长从圆内接正六边形算起，所用方法为“屡求勾股”，一直算到$6\times2^{33}$边形；圆外切多边形的周长从正四边形算起，一直算到$4\times2^{33}$边形，两种算法所得结果，在精确度范围内均相等。卷十六仍为“割圆”，但内容与卷十五不相同，主要从割圆八线、六宗率、三要法、二简法、八线相求和求象限内各线总法等六个方面进行阐述。其中新增了求圆内接正十四、正十八、正七和正九边形一边之长，再通过三要法、二简法以及新增的求三分之一弧正弦方法，便可求出八线表中精确到$1'$的所有角的八线长，精度达到小数点后第五位，这一点我们后边再详细论述。卷十七为“三角形边线角度相求”，包括直角三角形和斜三角形。这一卷属于平面三角学中解三角形问题，但对于一般三角形的处理方法是化成直角三角形解决，所用的定理主要是正弦定理，有些则是这一定理的变形。卷十八为“测量”，分勾股测量和三角测量两类。这一卷是非常实用的问题，所用方法是上一卷的主要定理，这二卷可以看做是一个整体。卷十九和卷二十都是讲与面积有关的问题。前者讲直线形，如正方形、三角形、梯形、多边形等；后者讲曲线形，如圆、圆环、椭圆、三角形内容圆、方内容圆、圆内容圆等。卷二十一和卷二十二主要讲正多边形面积，与内接圆径、外切圆径间的关系。前者是已知圆径，求内接、外切多边形的边长与面积，一直算到正十边形。后者是知道正多边形一边之长求面积，从正五边形一直算到正十边形。最后附“变更形”一节，共介绍六个问题，大致内容是讲已知正多边形一边之长求与此形等积的圆半径，或等积的其他多边形边长；或者已知圆面积求与其面积相等之其它正多边形一边或与圆径相等内接正多边形面积，只有一个问题是已知正多边形面积求径与之边相等的圆之面积。这些问题只涉及到正三、四、五、六、七、八边形。

卷二十三为"立方"，主要讨论开立方的方法。本卷共给出15个问题，总的说来它们属于同一个类型。前两个问题比较简单，给出开方原理，而后边的问题数字逐步增多，因此难度不断加大。卷二十四是"带纵较数立方"和"带纵和数立方"，主要研究一元三次方程的解法。设长方体的已知条件为$a$，$b$，$V$，解$x(x+a)(x+b)=V$和$x(a-x)(b-x)=V$的三次方程正根，以求该长方体的三条棱长。前一个方程为带纵和数立方，后一个为带纵较数立方。最后是勾股法四条，以解决勾股形求解中出现的三次方程问题。卷二十三和卷二十四是一个整体，内容的叙述方式也大致相同。卷二十四所论及的三次方程解法已有了微分学思想，很有价值，后面还将专门讨论。卷二十五论及棱柱、棱锥、棱台等直线体的体积以及有关量的互求问题。卷二十六讲圆柱、圆锥、圆台、球、截球体、椭圆体及其组合，如空心球、倚壁形等几何体的体积与有关量的计算问题。卷二十七讲"各等面体"，研究正四、八、十二、二十面体，已知一边之长求其体积。卷二十八为"球内容各等面体"与"球外切各等面体"，研究球内容和外切正四、六、八、十二、二十等面体问题，已知球的直径，求这些等面体的边长与体积。卷二十九为"各等面体互容"与"更体形"，主要研究正四、六、八、十二、二十面体分别互容问题，其题型是已知正多面体一边之长，求其内容正多面体的边长。最后附更体形，研究六个问题，即与正方体等积的圆球半径，求直径与已知正方体边长相等之球积，求与已知球积相等之正四面体的边长，求边与已知球径相等之正四面体之积，求与已知正八面体等积之正十二面体之边长和求与已知正八面体等边的正二十面体之积。卷三十为"各体权度比例"和"堆垛"，为了使线面体公式得以在日常生活中应用，需要解决物质的权度，也就是物质的比重问题，这样，可以通过比重解决与体积、重量三者的互求问题。本卷给出32种物质权度，然后举例说明如何计算。这一卷也是物理问题，我们将在

后面深入研究。最后介绍几种垛积计算公式，都是比较常见的。

卷三十一至卷三十七为“借根方比例”，介绍西方传入的代数内容。卷三十一的小标题为“定位法、加法、减法、乘法、除法”，讲多项式的表示方法以及加减乘除四则运算和乘方运算方法。卷三十二的小标题为“开诸乘方法”和“诸乘方表”，主要介绍利用数表解开方问题方法，从开平方一直到开十次方。卷三十三小标题为“带纵平方，带纵立方、三乘方四乘方五乘方附”，讲解六次以内高次方程解法。卷三十四小标题为“线类”，主要处理实际生活中用一元一次方程可解的问题。卷三十五和卷三十六小标题分别为“面类”、“体类”，处理可用二次和三次方程解决的实际应用问题。卷三十七为“杂题”，介绍一些难度较大的题目，以作练习，主要使用借根方比例法求解，也有少量题目用其他比例法求解。卷三十八为“对数比例”，本卷先讲几个对数性质，然后讲三种造对数表方法以及处理造表法中一些技术性问题。最后讲求八线对数，进而利用对数解决一些应用问题。例如勾股形解法、三角形解法等。卷三十九和卷四十为“比例规解”，介绍比例规的构造和使用方法。前者小标题为“平分线、分面线、更面线、分体线、更体线、五金线”，讨论其原理并举例说明使用方法。后者小标题为“正弦线、正切线、正割线、昼日晷法、假数尺、正弦假数尺、切线假数尺、割线假数尺”，讲解三角函数线及日晷线画法，以解决天文历法中问题；介绍几种假数尺以利于用对数解决实际应用问题。

3. 附录

这一部分共 8 卷，其中卷一是对数表，卷二至卷五为对数表上，卷六之一、二、三、四、五均为对数表下。卷七上为八线对数表，下为八线对数表下。卷八也分两部分，上、下均为八线对数表下。此外，尚有“对数阐微表”一份，介绍 10 万以内自然数都分解成素因数连乘积。

## 二、版本流传

《数理精蕴》于雍正元年(1723 年)出版以来，作为一部由康熙御制的数学百科全书，在全国流传甚广。首先是允许民间刊印，雍正十年(1732 年)奏准："《律历渊源》及《(历象)考成后编》书板均交监收贮，愿印者听，颁赐各省听其翻刻，以广流传。"① 十三年(1735 年)又规定：在第二年的《时宪书》上要改写为"钦天监钦遵御制《数理精蕴》印造"，颁行天下②。上面所说的翻刻一事，还只是限于"各省"，不能任何人都能刻印。四年之后的乾隆元年(1736 年)，参加《律历渊源》的领导人之一梅珏成提出请求"敷布御制《律历渊源》以广圣孝"，转奏人说：

"敬惟圣祖仁皇帝集古今之大成，统天人而一贯，研究数十年，荟萃成书，以嘉惠来学。现今书板存贮礼部，外间并无翻刻之板，是以未能流通。应如梅珏成所奏，令礼部招募坊贾人等印刷鬻卖，严禁书吏阻挠需索。至于省直书院并所属各学，自应发给收存，以为士子观览学习之用。但外省遣人赴部印刷，未免跋涉，不若即由礼部印发各省之便。应交礼部将现存书板，印刷数百部，按省分之，大小酌量发给。其书坊有情愿翻刻者听。其翻刻鬻卖，广布流通。再臣民翻刻书板，理宜敬避御名。"

还提议，在翻刻时宜避乾隆帝之讳，他叫爱新觉罗·弘历，把《律历渊源》改为《象数渊源》。乾隆帝不同意这个建议，他说："此系皇祖皇考所定之书，岂可因朕名而改易，翻刻时仍为《律历渊源》，天下臣民口呼为《律书渊源》可耳，余依议，钦此。"③ 批准了请求，翻印时书名仍《律历渊源》，而用口说时则用《律书渊源》就行了。

其次，由于允许民间的翻印，了解的人逐渐增加。《律历渊

---

①② 转引自：李俨．中算史论丛(第三集)．北京：科学出版社，1955．64

③ 见《历象考成后编·奏议》。

源》中的《数理精蕴》部分，很快出现了缩减本或改编本，其中的代表人物是庄亨阳。

庄亨阳(1686～1746)，字元仲，南靖(今福建南靖县)人。康熙五十七年(1718 年)进士，曾在地方上做官，管理河务工作。他于高深测量之宜，随事推究，设问答以穷其变，因笔之于书。其后人取其遗稿，编辑成书，为《庄氏算学》8 卷①。后来收入《四库全书》。《四库全书总目提要》说：其中“中间大旨，皆遵《御制数理精蕴》，而参以《几何原本》、《梅氏(历算)全书》，分条采摘，各加剖析，颇称明显”。

稍晚的如屈曾发和何梦瑶等都是以《数理精蕴》为主而著书的。屈曾发，字省园，江苏常熟人。他从乾隆己丑(1769 年)得《数理精蕴》一书，“伏而读之，订古今之同异，集中西之大成”，因成书凡 13 卷，名为《数学精详》②。但是该书也是冥求《九章算术》之作。何梦瑶有《算迪》12 卷，今存 8 卷。

最后是《数理精蕴》成为数学教科书，直到清末尚被采用为新兴学堂之教本③。

由于以上这些原因，《数理精蕴》迭经再版。据初步统计，不算各种抄本，光是印刷本就有 30 种左右④，是清代数学著作版本最多者之一。

---

① 阮元. 庄亨阳. 见：畴人传. 卷四十一

② 屈曾发. 数学精详·自序

③ 李俨. 中国数学大纲(下册). 北京：科学出版社. 1958. 546

④ 李迪，查永平. 中国数学史大系(副卷二). 北京：北京师范大学出版社，2000

## 第二节　算术与数表（笔算）

这一节主要谈《数理精蕴》中的算术与数表，在算术问题中简单介绍笔算方法。

### 一、算术问题

算术问题系一般的简单整数性质和用算术解决的应用题，主要分布于上编第五卷《算法原本》和下编卷一至卷九。

《算法原本》主要讲一些基本概念、整数理论、四则运算、分数和比例等，共讨论60个问题。一开始谈到数的生成问题，把一看做生成数的基本数，“一者，数之原也，众一相合，而数繁焉”。数有大小、多少之分，要了解它们之间的性质，必有一定法则，“始可以得其准”。先把自然数分为奇偶两大类，均以能否被2整除作为标准。书中还谈到合数与因子问题，“若夫积累小数，与大数等者，此小数即度尽大数之准也”。这里的“度”就是度量，相当于除，这个大数就是合数，“小数”就为其因子。书中也涉及到素数概念[①]：“有大数无小数可以度尽者，如五、七、十一、十三之类，任用二、用三、用四俱不能度尽也。”这是我国数学史上最早出现的素数概念。对于互素的概念，书中也明确给出：

“有两大数或三大数，用小数彼此不可以度尽者，如十五与八之两数，用二用四可以度尽八而不能度尽十五；用三用五可以度尽十五而不能度尽八。”

这就是说，两大数或三大数，彼此没有大于一的公约数，即互素。对于求两个整数的最大公约数，书中介绍用“互转相减”法解决：“凡两数互转相减，未至于一而即可以减尽者，此减尽之最小数即可以度尽此两数也。”对于多于两个数求其最大公约数，书中用

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．268

16，12与8为例说明。先求16与12的最大公约数4，再求4与8的最大公约数4，则4即为此三数的最大公约数。对于互素概念，又用最大公约数为一来阐发：

“凡两数互转相减，至于一始可以减尽者，一之外别无他小数可以度尽此两数也。”

“互转相减”法（就是《九章算术·方田》的更相减损术）与欧几里得“辗转相除”法，本质上相同。前者不用除法，对于求两个以上数最大公约数时，可以不拘次序任意挑两个数相减，直至出现余数完全相同，比用其他方法求更为方便[①]。书中在谈到线段的比例时，也涉及到无公度线段问题，“凡正方形一边线与对角线，无一度可以彼此度尽者”，这是无公度线段存在的一个典型例子。书中也给出证明：“盖以本方积（边自乘）与对角线所成方积之比，必有一数（2）非正方数也。”此证法的理论根据可能来自欧几里得《几何原本》卷X命题九[②]。该证法与现代教科书中利用欧几里得辗转相截永无完结之时方法不同[③]。然而，《算法原本》中没有对无公度线段的性质作深入讨论。另外，该书中也谈到求几个整数的公倍数问题，其求法是：

“凡有几小数欲求俱可以度尽之大数，则以此几小数连乘之得数始为此几小数度尽之一大数也。”

这种方法是几个小数互乘法，书中未提及最小公倍数概念。但是，在《数理精蕴》下编卷二“通分”一节中，涉及到当几个分数相加或相减时，若有几个分数相加所得分母与余下分数分母相同，则不用再通分即可相加，比起分母互乘通分运算起来省点步骤。如

① 沈康身. 中算导论. 上海：上海教育出版社，1986. 50

② 欧几里得《几何原本》. 兰纪正，朱恩宽译. 西安：陕西科学技术出版社，1990. 341

③ 余元庆，等. 平面几何. 北京：人民教育出版社，1957. 8～9

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{12}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{4}{12}=\frac{17}{12}+\frac{4}{12}=\frac{21}{12}=1\frac{9}{12}。$$

下编卷一“命位”中谈到小数点表示法问题。“凡数视所命单位为本”，并在表示数时“单为一位”，以上者为十位、百位等。凡是所表示之数未至单位者必须补“0”，以“存其位”。对于单位以下出现小数时，给予特殊记号表示，“凡数单位后有奇零者，必作点于单位上以志之。如有金三百四十五两六钱七分，命两为单位，则于五上作点志之”(如图 3.2.2 所示)。关于小数的记法，我国古代早已有之。刘徽注《九章算术》时已有小数的概念。秦九韶《数书九章》中有明显的表示方法。如 $\overline{\text{日}}$ 𝍠 𝍬 𝍣 𝍮 𝍠 𝍭 𝍣 表示 1.144 615 4日。

三四五˙六七

图 3.2.2

与现代小数表示法不同之处是，此时的小数点放在单位数字的右上角，而非右下角。在我国，小数点的使用以《数理精蕴》为最早，它确实用了点“·”。其来源无疑是传教士从西方带来，因为西方使用小数点是在 17 世纪初[①]。

下编卷四“按分递折比例”实际上就是按比例配分的算术问题，在《算法统宗》中属“衰分”章。这里的“二八差分”、“三七差分”、“四六差分”、“递折差分”、“加倍减半差分”，实际上是按比例 2∶8，3∶7，4∶6，真分数，2 或 $\frac{1}{2}$ 的连比例配分。这些名词大部分都可以在《算法统宗》中找到。

卷五“按数加减比例”，副标题为“递加递减差分”、“超位加减差分”、“互和折半差分”、“首尾互准差分”，这些内容仍属“衰分”。“递加递减差分”是各衰成等差数列问题，“超位加减差分”也是衰分问题，各衰之差并不相等，这两种差分在《算法统宗》中

① 李迪. 十进小数发展简史. 数学通报，1964(10)：47～49

列于"递减挨次差分"一节中。"互和折半差分"实际上也是各衰成等差数列的衰分问题，只是知其和与首末两项之差，以总数除以衰的个数，求得中数，再以首末两项之差求得公差，以解决各衰应分数，此类问题在《算法统宗》中属"互和减半差分"。"首尾互准差分"则为"互和折半差分"之变形。

卷六论述"和数比例"与"较数比例"。前者实际上是衰分问题，只不过列衰为分数，并非一般的整数。其解法大体不外比例配分。后者论述每一物与较数之比等于共物与共较之比或者共物之较与每一物价较之比等于共物与每一物价之比等。此类问题在《算法统宗》中称"匿价差分"。

卷七为"和较比例"，主要研究已知甲、乙物各自单价以及共价买共物若干，求甲、乙物各多少之类的问题，《算法统宗》中称"贵贱差分"，《同文算指》中称"和较三率法"。这类问题还涉及贵贱差分的推广，即三色、四色差分，可归结为多元一次不定方程求解。

卷八和卷九论述"盈朒"、"借衰互征"和"迭借互征"，主要取材于《算法纂要总纲》和《同文算指》。所谓"借衰互征"就是在解决有关"有总数而无分数或有分数而无总数，或无总数分数之实率而但有虚率"时，另借一衰作为比例，由此可以解决上述问题，故叫借衰。借衰的情况也有不同，有的借于本数之中，有的借于本数之外，这样"借彼征此，借虚征实"，故为互征。如本节第二十一题：

"假若有一数，但云其数二分之一、三分之一、四分之一、五分之一、六分之一，共并五百二十二，问原数几何?"

其解法是，先借一数，可分为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，这些分数的公分母为60，所以借60为总衰数，则其$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$分别为30，20，15，12，10，相加，其和87为一率，共并数522

为二率，总衰60为三率，解比例式得四率为360，即原数。因原数隐而未露，故虚借一数以作比例互征。“迭借互征”是解决问题时，因设数隐伏，一次借衰不能求解，必须先借一数与原数相较，再借一数与原数相较，根据两较立算求解。例如本节第一题：

“设有银一百两，命甲、丙、丁三人分之，甲比丙多一倍，丙比丁多二倍，问每人应得几何？”

解法是，先借12两为甲银衰数，则丙衰数为6两，丁衰数为2两，并三数为20两，比原数相比少80两。再借24两为甲衰数，则丙得12两，丁得4两，并三数为40两，与原数100两相较少60两。用两朒算法得比例式

$$\frac{80-60}{24-12}=\frac{80}{x}。$$

解之得$x=48$两。48+12=60两为甲银数，则丙为30两，丁为10两。由此可见，迭借互征解法比较复杂一些。

下面谈一下笔算。《数理精蕴》算术部分也是西洋传入的笔算内容。历史上，外国笔算曾几次传入我国，但未引起重视，因而未推广开来。明末编译的《同文算指》(1613年)，既是中国数学史上欧洲近代数学传入之始，又是介绍欧洲笔算的第一部著作。该书前编“定位第一”节下，先评论了我国古代的筹算和珠算之后，接着指出：“兹以书代珠，始于一究于九，随其所得而书识之。”该编还讨论了整数及分数的四则运算，其中加、减、乘与分数除法，和《数理精蕴》中大致相同，但除法和开方倒是15世纪末意大利数学家应用的“帆船法”，十分繁杂[①]。《数理精蕴》则摒弃此法，采用了与现代比较接近的方法。如下编卷一“归除”节第五题：

“设有田四十五亩六分，共纳谷五十七石，问每亩纳谷若干？”算式是(汉字数码换成阿拉伯数码，下同)：

---

① 李俨．中国数学大纲(下册)．北京：科学出版社，1958．408～412

```
      1 2 5
4 5 6
5 7 0
4 5 6
1 1 4 0
  9 1 2
0 2 2 8 0
  2 2 8 0
  0 0 0 0
```

答案是每亩纳谷一石二斗五升。

与现代写法不同之处在于除数放在被除数之上，如果放在除数左边，则无大的差别。

下编卷二十三“立方”节第十题：

“设有正方体积三十二亿九千四百六十四万六千二百七十二尺，开立方，问每一边数几何?”

算式是：

```
                    1     4     8     8
                    3 2 9 4 6 4 6 2 7 2
                    1
4 3 6              |2 2 9 4
                    1 7 4 4
6 2 2 2 4          |0 5 5 0 6 4 6
                      4 9 7 7 9 2
6 6 0 6 7 8 4        |0 5 2 8 5 4 2 7 2
                        5 2 8 5 4 2 7 2
                        0 0 0 0 0 0 0 0
```

如果把商放在被开方数的右边，其写法与现代完全相同。

《数理精蕴》下编卷三十二“诸乘方表”给出开三、四、五、六、七、八、九、十方数表，用于开高次方。如五乘方(即六次方)表如下：

表 3.2.1

| 九 | 八 | 七 | … | 二 | 一 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 531441000000<br>3542940000 | … | … | … | … | … | ○ |
| … | … | … | … | … | … | 一 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 832972004929<br>5152404154 | … | … | … | … | … | 七 |
| … | … | … | … | … | … | 八 |
| … | … | … | … | … | … | 九 |

表的构造是：横行所列一至九之数为初商根，右直行所列数目，自○至九为次商根。每格所列细数两层，上层为初商次商积，下层为三商廉法。我们用“五乘方”一节中第一题为例说明具体使用方法。原题为：

“设有五乘方积八十五京九千零六十八兆三千零一十亿二千五百三十九万零六百二十五尺，开五乘方，每一根之数几何？”

算式如下：

```
                    9           7           5
8 5 9 0 6 8 3 0 1 0 2 5 3 9 0 6 2 5
5 3 1 4 4 1
-----------
3 2 7 6 2 7 3 0 1 0 2 5
8 3 2 9 7 2 0 0 4 9 2 9
-----------------------
0 2 6 0 9 6 2 9 6 0 9 6
8 5 9 0 6 8 3 0 1 0 2 5 3 9 0 6 2 5
-----------------------------------
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

具体算法是，从九〇格中上层找到 $531441\times10^6(=90^6)$，决定了初商根为九。从被开方数中减去初商积，把 301025 续于后，为次商廉偶之共积。在九〇格内查到三商廉法为 3542940000，用以试除次商廉偶之共积，得商七。在九七格上层查到初商次商积（$97^6$），从被开方数中减去它，余数再把 390625 续于后，为三商廉偶之共积。再于四乘方表（本书未列出）中九七格上层查出初商次商积，再乘以六，即 $85873425170\times6$ 万尺，为三商廉法，用以除三商积，适五倍。这样 $975^6$ 恰与被开方数相同，故方根为 975。

**二、数表**

数表共 8 卷，卷一、二“八线表”，给出 0～45°每隔 10′的角的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割函数值。根据余角三角函数公式可知，该表实际上给出 0°～90°相应角的六种函数值。对于正矢和余矢函数，“八线表”中解释道：“正矢余矢二线，正矢即半径减余弦之数；余矢即半径减正弦之数，故表内虽不列正矢余矢，而其数已寓矣。”对于八线表的用场，表中给予肯定，“八线之用，关于数理者甚大”，并且使用时“立表愈密，则为用愈精”。“表说”还叙述了八线表的用法，对于所查角不在表中出现时，用比例配分的方法求之，也就是使用线性插值法求。

卷三至卷四讲“对数阐微”，给出 10 万以内自然数表，其中包括素数与合数（逐次分解）。至于为什么要研究“对数阐微”，其

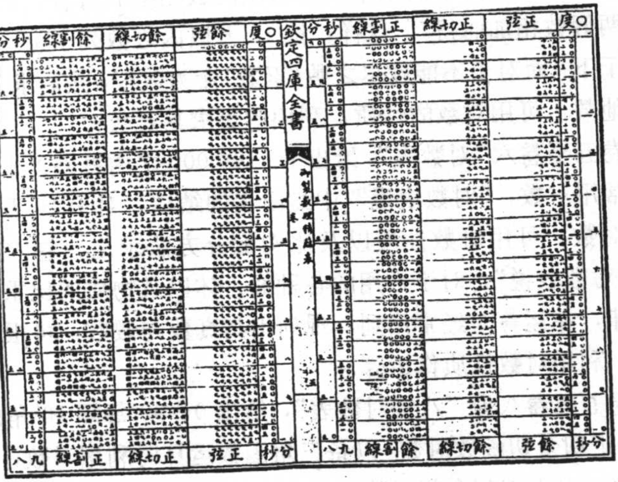



图 3.2.2　《八线表》书影

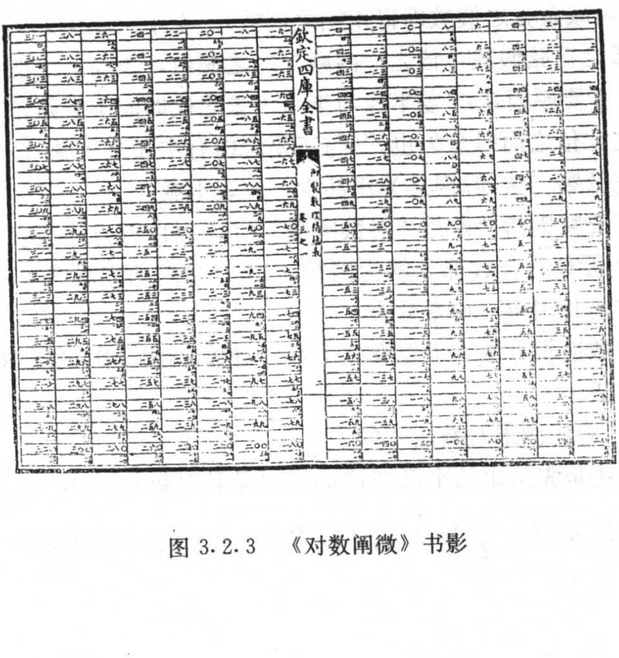



图 3.2.3　《对数阐微》书影

原因是“凡有真数求假数，其真数以两数相乘而得者，则其假数可以两假数相加而得”。这样，把10万以内之数列于上，相乘两数注于下，而对于不能度尽之数(素数)命为数根，然后求其假数。对其他数，可用对数的性质，利用此表求其对数。

卷五至卷六“对数表”，给出1～100 000之内每差1个单位的各数常用对数。“对数表说”中给出表的结构。对于10万以上之数的对数，可用对数性质以及比例配分方法求之。卷六末附有“定率对数表说”，对于常用的各种面、体以及物质的比重有比例之定律，在运算时经常用到，现列出其真数与假数，可根据问题实际，利用对数性质作运算。

卷七至卷八为“八线对数表”，给出0～90°每隔10′角的正弦余弦、正切余切函数对数，以备三角函数运算时利用对数计算，方法简捷。对于正割余割对数，这里用比例法增补(道理是，余弦为一率，半径为二率，又为三率，则所得四率为正割，故以半径之假数倍之，内减余弦之假数即得正割之假数)。至于求正矢之假数，则以半弧之正弦假数，倍之，内减半径之假数，再与2之假数相加即得。主要原因是：“盖半径与半弧正弦之比即同于半弧正弦与半正矢之比倍之而得全矢也。”(与三要法内有本弧之正弦，余弦求半弧之正弦第二法同)因其为用甚少，故表不载。

需要特别指出的是“对数阐微”10万以内的自然数表，其重要性是所有的合数都分解为因数，10万以内的素数当然都在其中。这是我国第一份素数表。

对数造表方法。下编卷三十八“对数比例”中介绍三种对数造表方法。

1. 中比例求对数法

此法是先给出两个已知数$a$，$b$以及其对数$\lg a$，$\lg b$，然后利用公式$\lg\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，求出$a$和$b$的比例中项$\sqrt{ab}$的对

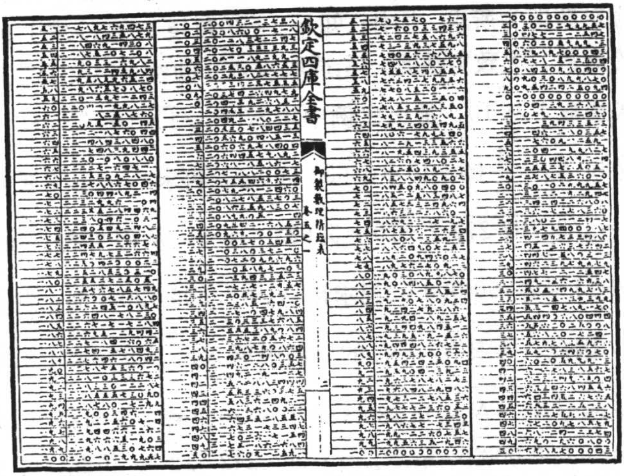



图 3.2.4　《对数表》书影

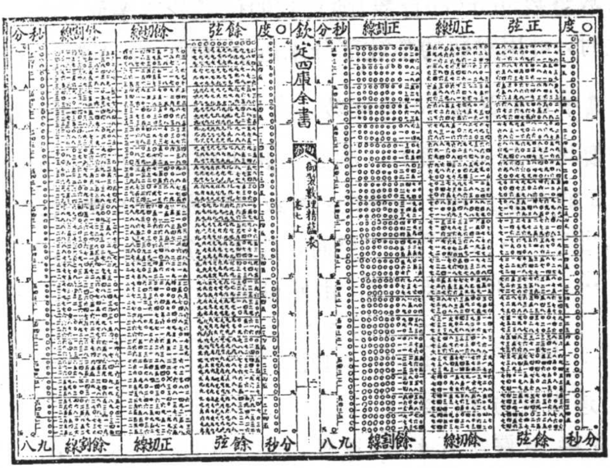



图 3.2.5　《八线对数表》书影

数。适当选取两个真数，累次求比例中项，逐步逼近所求真数，则其相应对数即为所求。书中已知 $\lg 1=0$ 和 $\lg 10=1$，求 1 和 10 之间 9 的对数。大致方法是，先选取接近 9 的两个已知真数，这里第一次选取 1 与 10，那么比例中项 $N_1=\sqrt{1\times 10}=3.162\ 277\ 7$，从而得 $\lg N_1=\frac{1}{2}(0+1)=0.500\ 000\ 0$。再求 $N_1$ 与 10 的比例中项 $N_2=\sqrt{3.162\ 277\ 7\times 10}=5.623\ 413\ 3$，从而可得 $\lg N_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=0.750\ 000\ 0$。当求出 $N_5=9.305\ 720\ 4$ 时，发现它已大于 9，因此，再求 $N_4$，$N_5$ 的比例中项 $N_6=8.976\ 871\ 3$，然后，求出 $N_7=\sqrt{N_6\cdot N_5}=9.139\ 817\ 0$，……这样，求到第 26 次时得到 $N_{26}=9.000\ 000\ 0$，$\lg N_{26}=0.954\ 242\ 512\ 5$。仿此，可求出任何数的对数。

2. 真数递次自乘求对数法

对数整数部分（即首数）随真数的位数的增多而递加。当真数相当大时，可用对数的整数部分来近似地求出其对数。设 $\lg a^{2^n}=b+a$，其中 $b$ 为首数，$a$ 为尾数，则 $\lg a\approx\frac{b}{2^n}$。运用这种方法求对数，需要将真数逐次乘方，因此，此法称真数递次自乘法。书中是以求 2 的对数为例来说明的，大致过程为：当真数为 $2^1$，$2^2$，$2^4$，$2^8$，…，$2^{16\ 384}$，…，$2^{137\ 446\ 953\ 472}$时，其首数分别为 0，0，1，2，…，4 932，…，41 375 655 307，由此可得

$$\lg 2=\frac{41\ 375\ 655\ 307}{137\ 446\ 953\ 472}=0.301\ 029\ 995\ 6。$$

3. 递次开方求对数法

首先将 10 屡次开平方，这样，$10^{2^{-53}}=1+2.556\times 10^{-16}$，$10^{2^{-54}}=1+1.278\times 10^{-16}$，显然，$10^{2^{-54}}-1\approx\frac{1}{2}(10^{2^{-53}}-1)$。但是 $2^{-54}=$

$\frac{1}{2}\times 2^{-53}$，因此，当$h$很小时，$10^h-1$与$h$近似看做成比例。据此，可求$1+10^{-16}$的对数：

$$(10^{2^{-54}}-1):2^{-54}=10^{-16}:\lg(1+10^{-16})。$$

由此得，$\lg(1+10^{-16})=2^{-54}\times 10^{-16}\div(1.278\times 10^{-16})$

$$=0.434\ 294\ 481\ 9\times 10^{-16},$$

于是，当$\alpha$很微小时，$\lg(1+\alpha)\approx 0.434\ 294\ 481\ 9\times\alpha$，此处0.434 294 481 9是一个常数，称为对数根。此书以2为例说明这种方法的具体求法步骤。先将2屡次乘方，使其首位数字是1，得到$2^{10}=1\ 024$，变成$\frac{2^{10}}{1\ 000}=1.024$。再将1.024屡次开平方，一直开到47次，得到

$$(1.024)^{2^{-47}}=1+1.685\ 16\times 10^{-16},$$

由上面的结果可推出

$$\begin{aligned}&\lg(1+1.685\ 16\times 10^{-16})\\&=0.434\ 294\ 481\ 9\times 1.685\ 16\times 10^{-16}\\&=0.731\ 855\ 9\times 10^{-16},\end{aligned}$$

从而可得　$\lg 1.024=2^{47}\times 0.731\ 855\ 9\times 10^{-16}$

$$=0.010\ 299\ 956\ 6,$$

亦即　$\lg\frac{2^{10}}{1\ 000}=10\lg 2-3=0.010\ 299\ 956\ 6$。

因此　$\lg 2=0.301\ 029\ 995\ 66$。

由上述求对数方法，再结合对数性质，即可造出对数表来。

上述对数造表方法，出自英国数学家布列格(Henry Briggs，1561～1630)之手，《数理精蕴》首次将其介绍到中国。这种方法对清代数学研究有很大影响，“所引出的戴煦、顾观光、徐有壬、

李善兰等人有关对数的研究，则是清代数学中最有成就的”[①]。《数理精蕴》所载对数造表法的初等方法对今日中学数学教育仍有借鉴和参考价值，不论是课堂教学或课外活动，将其选为教材仍有生动活泼的积极效应。

## 第三节 “借根方法”

“借根方法”即“借根方比例”，主要在《数理精蕴》下编卷三十一至卷三十六中介绍，此法是西方传入中国的代数学知识。至于为什么此法叫“借根方比例”，卷三十一“借根方比例”一节开首交待得非常清楚，文中称：“借根方者，假借根数、方数以求实数之法也。”这里所说的“根数”就是所求的未知数，“方数”就是根数的正整数方幂。这样，就会有根与方数俱为连比例率，因此，这门数学分支就定名为“借根方比例”。究竟如何借根借方求出实数，本节也给出具体说明：“此法设立虚数，依所问之比例乘除加减，务令根、方之数与真数相当适等，而所求之数以出，此借数之巧也。”这里“虚数”就是未知数 $x$，“真数”就是已知数，再根据题中所给条件，对未知数和已知数进行加减乘除运算，再求等量关系、列出方程、解方程就可得出欲求之数。

我们知道，利用方程解应用问题，首先应设未知数，然后依据未知数与已知数列出代数式，再寻求等量关系、列出方程、解方程。《数理精蕴》这一部分对此作了安排，大致分为五个方面：多项式的表示方法及四则运算、数字开方、开带纵平方、开带纵立方及实际应用问题。下面分别叙述。

---

① 韩琦. 《数理精蕴》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷（第三分册）. 郑州：河南教育出版社，1993. 9

## 一、多项式表示法及四则运算

卷三十一开始讲指数运算法则，即“定位法”。先给出定位表(见表3.2.2)。此表前列所写为借数之名称；后列所写为定数之位。具体作同底幂乘除法的法则是：

“其定位者视根方所对之位也。乘法定位，以两数所对的位数相加，其加数之方，即乘出之方也；除法定位，以两数所对之位数相减，其减余数所对之方，即除出之方也。”

表 3.2.2

| 后 | 前 |
|---|---|
| ○ | 真数 |
| 一 | 根 |
| 二 | 平方 |
| 三 | 立方 |
| 四 | 三乘方 |
| 五 | 四乘方 |
| 六 | 五乘方 |
| 七 | 六乘方 |
| 八 | 七乘方 |
| 九 | 八乘方 |
| 一○ | 九乘方 |

例如，根乘平方得立方，其原因是根和平方所对定位分别为一和二，相加为三，而三对表中借数之名为立方。

有了指数运算法则以后，我们就可以进行单项式的乘除运算，因为“众数之经纬，尽归乘除，而乘除之条理又取准于定位”。书中虽未明确说明单项式乘除法则，但从后文看出已隐含其中。单项式乘除法可以用现代数学符号表示为

$$(ax^m)(bx^n)=(ab)x^{m+n}\quad (m,n\text{ 为非负整数})；$$

$$\frac{ax^m}{bx^n}=\frac{a}{b}x^{m-n}\quad (m\geqslant n,\text{均为非负整数})。$$

另外，在“定多少与相同号式”中规定了单项式加与减的运算符号，以“⊥”表示加号①，“－”表示减号，“＝”表示等号。有的版本，加号用“＋”。虽然未规定乘号，但从例子中明显看出，两个式联在一起书写即表示相乘。如

① 郭书春编．中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册)．郑州：河南教育出版社，1993．941

“一平方⊥二根”表示 $x^2+2x$；

“一立方一二根”表示 $x^3-2x$；

“二立方=十六”表示 $2x^3=16$。

对于多项式的加法，先规定符号法则，然后举例说明。符号法则是：

“凡多与多相加，得数仍多；少与少相加，得数仍少。多与少加，少与多加，则反相减为所得数，则多数大则得数亦为多；少数大则得数亦为少。”

例如求多项式 $4x^3+3x^2-2x+5$ 与 $5x^3-x^2+3x-2$ 的和，其算式如下：

$$\begin{array}{r}4x^3+3x^2-2x+5\\ \underline{5x^3-x^2+3x-2}\\ 9x^3+2x^2+x+3\end{array}$$

相加时，多项式按 $x$ 的降幂排列，为了不致混乱，对于所缺之项以 0 补之。

对于多项式减法，也是先叙述符号法则，大致精神与加法相同，只不过相减时情况稍复杂一些。

多项式乘法与现代方法相同。先按降幂排列，然后上下写成两行并按位对齐。从末位起，逐项遍乘，将乘出之数“以类相从”，也就是合并同类项，便可得出乘积。逐项相乘时涉及到符号问题，该节以减为少，以加为多，分各种情况详细介绍。

多项式除法运算，先将多项式按降幂排列，但强调以真数，也就是未知数的零次幂为单位，不到这一位的，应补充若干个零。另外，将商的首位记于常数项之上，除式常数项所对被除式中之位即商的首位，当然除式被除式的首位上下对齐。具体作除法与常法相同，符号规则与乘法同。例如求多项式 $(8x^3+8x^2+2x-4)\div(2x^2+3x+2)$，算草如下：

$$
\begin{array}{lllll}
 & \text{得} & & & \\
 & \text{数}\,\underline{4x-2} & & & \\
\text{法} & \underline{2x^2+3x+2} & & & \\
\text{实} & 8x^3+8x^2+2x-4 & & & \\
 & \underline{8x^3+12x^2+8x} & & & \\
 & 0 \quad -4x^2 & -6x & -4 & \\
 & \quad\;\; \underline{-4x^2} & \underline{-6x} & \underline{-4} & \\
 & \quad\quad\; 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

这里按传统数学的习惯把被除式和除式分别叫做实和法，而商叫得数，其书写方法与现代形式稍异。

## 二、数字开方

“数字开方”主要研究开平方、立方、三乘方……九乘方，内容安排在卷三十二中。该卷“开诸乘方法”一节谈到“借根方比例法中，开各乘方最为重要”，因而需要加以研究。开方的方法有难易，关键在于“廉法”的多少。一般来说，开平方较容易，开立方较难，开三乘方以上各乘方更难。虽然对于某些高于三次的开方可以用开平方、开立方等代替，如开三乘方可以两次开平方，开五乘方可用两次开立方，但因数大，次商之数不易确定，况且有的还不能用他法代替，如四乘方、六乘方等。因而创立一法，给出“诸乘方表”，方法甚捷。至于说如何利用此表开方，我们在上一节说过，这里不再赘述。

这一节除开平方外，都在介绍一般开方法基础上再介绍用表开法，有些还介绍一些其他方法。这一节例子中数字都比较大，计算起来相当麻烦，我们举开三乘方一例说明其一般开方法。例如求 103 355 177 121 的四次方根，算草如下：

```
      5       6       7
      ‿       ‿       ‿
1 0 3 3 5 5 1 7 7 1 2 1
  6 2 5
───────────────────────
0 4 0 8 5 5 1 7
  9 8 3 4 4 9 6
───────────────────────
0 0 5 0 1 0 2 1 7 1 2 1
1 0 3 3 5 5 1 7 7 1 2 1
───────────────────────
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

具体求解时，自个位起，每四位分为一节，用√表示，定初商为500，其三乘方为62 500 000 000，书于初商积之下，相减，余40 800 000 000，再把第二位积55 170 000续其后，共为40 855 170 000，为“次商廉隅之共积”。以$500^3\times4$为次商廉法，用其除次商，足80倍，故定次商为80，与初商合在一起为580，三乘方为113 164 960 000，大于原积，故改次商为70，与初商相加为570，三乘方为98 344 960 000，与原积相减，余5 010 210 000。将方根的第三位积7 121移下，得5 010 217 121，为“三商廉隅之共积”。再用$560^3\times4$，即三商廉法除之，足7，与原积相减恰尽，因此567即为所求之三乘方根。

按正常方法解，应该是

```
                          5       6       7
                          ‿       ‿       ‿
                    1 0 3 3 5 5 1 7 7 1 2 1
                      6 2 5
                   ─────────────────
5 9 7 4 1 6        ⁴√0 4 0 8 5 5 1 7
                      3 5 8 4 4 9 6
                       ─────────────────────
7 1 5 7 4 5 3 0 3     ⁴√5 0 1 0 2 1 7 1 2 1
                        5 0 1 0 2 1 7 1 2 1
                       ─────────────────────
                        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

此处5，6，7均为试得的数，而

$$597\,416=4\times50^3+6\times50^2\times6+4\times50\times6^2+6^3$$
$$=500\,000+90\,000+7\,200+216,$$

$$715\ 745\ 303 = 4\times 560^3 + 6\times 560^2\times 7 + 4\times 560\times 7^2 + 7^3$$
$$= 702\ 464\ 000 + 13\ 171\ 200 + 109\ 760 + 343。$$

书中把这种方法叫三乘方本法(未列出算草)。其法为，议得初商和次商后，此处以 50＋6 为例，则 $6\times 50^2\times 6$(六自乘廉)，$4\times 50\times 6^2$(四长廉)，$6^3$(一小隅)，与 $4\times 50^2$(四自乘再乘廉)相加，即为 597 416，再用 6 乘之，得 3 584 496 为次商廉隅之共积。

这两种方法不同，区别在于前法是议得“次商之后合初商乘三次，即得应减之积也”。

**三、带纵平方法**

“借根方比例”中开带纵平方法在下编卷十三中叙述，主要解决 $x^2+bx=c$ 型方程求正根问题，其解用公式

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{4c+b^2}-b)$$

表示。有时也用其变形公式

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}。$$

书中给出四个例子，但均未涉及到两个正根问题。

需要指出的是，下编卷十一中除了使用公式法开带纵平方外，还使用另一种方法求解。如本节第二个问题，求 $x(x+5)=1254$ 的正根。算草如：

```
  6 8            3 5           3   3
    3            3 0           ⌣   ⌣
-----        -------         1 2 5 4
2 0 4            0 0         1 0 5 0
             1 0 5           -------
             -------         0 2 0 4
             1 0 5 0           2 0 4
                             -------
                               0 0 0
```

解法大致思路是，先分节，定出商的十位数字 3。以 $(30+5)\times 30=1\ 050$ 减原积，得 $1\ 254-1\ 050=204$，再以 $30\times 2+5=65$ 试除 204，议得商个位数字 3。于是用 $(65+3)\times 3=204$ 减上一差 204

恰尽，所以根为 33。

这样解法的根据是，当议得初商 30 后，要议次商 $y$，我们作变换

$$(30+y)\ [(30+y)+5]=1\,254。$$

化简后为

$$\begin{aligned} y^2+(2\times30+5)y &=1\,254-(30+5)\times30 \\ &=1\,254-1\,050=204。\end{aligned}$$

现在要议出 $y$ 来，因 $2\times30+5=65$，与 204 相比较，再利用求 204 的最大平方数，然后与 65 相乘再相加，比 204 要大得多，因此，用 65 除 204 议得的个位数字比较接近问题的解答。这样，议得个位数字 3 后，得 $[3+(2\times30+5)]\times3=204$，恰好适合。

### 四、带纵立方

这一节介绍开带纵立方，并兼论带纵的三乘方、四乘方和五乘方，具体解法用例说明。例如本节第五个问题，即求方程 $x^3+13x^2+30x=27\,144$ 的正根。它的解法算草如下式：

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & & 6 & \\ 2 & 7 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

具体解法过程为，因为 $30^3<27\,144$，应取 30 为初商，但考虑到所带之平方与根皆为正号，故取略小之数 20 为初商。次商的决定方法是：以 $21\,744-(20^3+13\times20^2+30\times20)=27\,144-13\,800=13\,344$ 为“次商积”，而以 $3\times20^2+13\times2\times20+30=1\,750$ 为“次商廉法”。1 750 除 13 344，商大于 7，取略小整数 6 为次商。$20+6=26$，这样，$26^3+13\times26^2+20\times26=27\,144$，与原积 27 144 相减恰尽，故该方程的正根为 26。

该方程这样解的原因是，取得初商 20 后，作变换，令次商为 $y$，则将 $20+y$ 代入原方程得

$$(20+y)^3+13(20+y)^2+30(20+y)=27\,144。$$

整理得

$$y^3+(3\times20+13)y^2+(3\times20^2+13\times2\times20+30)y$$
$$=27\ 144-(20^3+13\times20^2+30\times20),$$

即　$$y^3+73y^2+1\ 750y=21\ 744-13\ 800=13\ 344。$$

再用1 750除13 344，议得次商为6，将20+6=26代入原方程适合，于是原方程根为26。

本节对这种解法的评论是“即推之多乘方，莫不皆然”，说明此法为求高次方程正根的一般方法。

若令$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$，则上述解法为，先估计初商为$\alpha$，则议次商为$y$，于是

$$a(\alpha+y)^3+b(\alpha+y)^2+c(\alpha+y)+d=0,$$

整理得

$$ay^3+(3a\alpha+b)y^2+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)y=-d-(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha)。$$

这样，以

$$-d-(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha)=-f(\alpha)$$

为次商廉法，则次商为$-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$，方程正根为

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}。$$

《数理精蕴》下编卷十一、卷二十四也有类似的方法。1685年牛顿提出一种求方程近似解的方法。1690年，牛顿的忠实信徒拉弗森(J. Raphson，1648～1715年)在其论文《一般方程分析》(Analysis Aequationum Universalis)中提出求$f(x)=0$的近似解的方法，相当于迭代法：$a^*=\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$，是对牛顿方法的改进，现在称之为牛顿-拉弗森迭代法，上述《数理精蕴》所载方法与此法完全相同。

至于《数理精蕴》中这种数字高次方程解法是从哪里来的，目前尚无定论。有人认为，牛顿—拉弗森法在17世纪末传入我国的

可能性很小，“当另有渊源”[1]；有的认为“目前还不能确切地回答”[2]；而有人认为“有可能来自该书卷二十四的开带纵较数立方这种传统的方法”[3]。后一种说法不是没有道理的。

## 五、实际应用问题

实际应用问题按线类、面类和体类三部分分别载于下编卷三十四、三十五和三十六中。

面类问题共有例题 61 个，涉及工程、贸易、分配、纳税、运输、鸡兔同笼等日常活动中经常遇到的问题，其中以贸易问题数量为最多。这些题目都是用一元一次方程解决，未知数设法很灵活，具体问题具体分析。例如本节第六十题：

“设如有银买缎、纱、绸三色，初次买缎二匹、纱六匹、绸八匹，共价八十四两；二次买缎一匹、纱四匹、绸七匹，共价六十两；三次买缎三匹、纱五匹、绸九匹，共价九十两，问缎、纱、绸每匹各价若干？”

这个题本来是三色方程，很容易解决，但书中是用一元一次方程解决的。解法大致情况是，设绸的单价为 $x$，则第一次买绸共价 $8x$，那么第一次买二匹缎的共价为 $84-8x-6$ 纱，用三率法算得第二次买一匹缎的价钱为 $42-4x-3$ 纱。这样，第二次买四匹纱的共价为 $60-(42-4x-3\text{纱})-7x=18-3x+3$ 纱，因而一匹纱的单价为 $18-3x$。最后由第三次所买 3 匹缎、5 匹纱、9 匹绸共价 90 两得出 $126-12x-9$ 纱 $+5$ 纱 $+9x=90$，用纱的单价 $18-3x$ 代入，整理得 $9x=36$，从而可得 $x=4$。由上面的推导可得纱、绸单价分别为 6 两和 8 两。此解法步骤实质是三元一次方程组的代入消元解法。《数理精蕴》也承认这一点，该题最后用小号字体

① 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 275

② 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 271

③ 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986. 394

注出“此三色和数方程法”。

面类解决有关面积和勾股等方面的应用问题，共36个题目，大部分用一元二次方程求解。例如本节第二十题：

“有一长方形，其面积八万三千二百三十二丈，又有一正方形，其每边与长方形之阔等。若以正方面积自乘，则与两方之共面积等，问二方边数各若干？”

此题解法大致方法是，设正方形面积为$x$，列出方程$x^2=x+83\ 232$，用和数带纵开方法解得$x=289$，即正方形面积，其平方根17为其边长，亦长方形的阔。17除长方形面积83 232得4 896，即为其长①。

体类是有关体积以及一般可以化成二、三次以至九乘方问题解的应用题，共40个题目。例如本节第二十二题：

“设如有大小二正方体，边数共十四尺，大方积比小方积多二百九十六尺，问二正方体之边数、体积各几何？”

解法大致程序是，设$x$为小正方体每边之数，则大正方体每边之数为$14-x$，依题意列方程$(14-x)^3-x^3=296$，化简为$x^3-21x^2+294x=1\ 224$，开带纵立方得$x=6$，从而可得大正方体边数为8尺。大、小正方体体积为516和216立方尺。

13世纪，我国宋元时代数学家发展了传统数学，特别是在代数学方面取得了一系列世界一流的成果。其中贾宪创造、经刘益和秦九韶之手逐步完善的求任意数字高次方程正根的“正负开方术”以及李冶、朱世杰创造的根据问题的已知条件布列方程的普遍方法“天元术”和“四元术”，尤为突出。天元术所论述的建立代数方程的一般方法相当于现代的设未知数列方程，因所设未知数为天元，故称天元术。然而，由于历史的原因，这份宝贵的数

① 原文中解得$x=289$后说“即正方形之面积”是正确的，但紧接着说“亦即长方形之长”是错误的。此处长方形之长4 896是笔者计算的。

学遗产未被后世人重视，以致金元之际的数学名著大都失传，近400年时间内无人能了解增乘开方法和天元术。甚至明代学者顾应祥在编辑《测圆海镜分类释术》时说，李冶“每条下细草，虽经立天元一，反复合之，而无下手之术”，于是他就“去其细草”，干脆把天元术全部砍去。所以，后来清阮元在其《畴人传》中批评顾应祥，“删去海镜细草一节，遂贻千古不知而作之讥”。到了清代，梅珏成曾跟从康熙帝学习过“借根方法”，研究过元《授时历》和《测圆海镜》，了解到“立天元一”术语，并用借根方比例演算古代题目，与天元术对照比较，撰“天元一即借根方解”一文，认为借根方法与天元一法“名异而实同”。

线性方程组的一般解法远在先秦时我国就已很熟练:《九章算术》列有专章讨论和指出具体算法——相当于今称矩阵初等变换法。可是历元明两代，因计算工具改变，方程术失传不彰，梅文鼎《方程论》5卷设90题，其理复苏，《数理精蕴》对此有进一步发展，载于下编卷十。

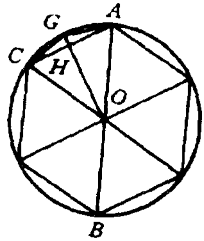
## 第四节 对几何学的研究

《数理精蕴》中几何学知识占的篇幅最多，从上编的卷二到卷四，下编的卷十二到卷二十九，基本上都属于几何学范畴。其中卷十六和卷十七讨论三角学，但前者三角函数的简单性质的论述使用的是几何方法；后者研究解三角形，与几何学的关系非常密切。我们知道，《数理精蕴》基本上是一部西方传入数学的编译作品，代表了当时传入西方数学以及当时中国数学家的研究水平，因而有不少新内容和中国学者的研究成果。本节简单介绍《数理精蕴》中对几何学的研究情况。

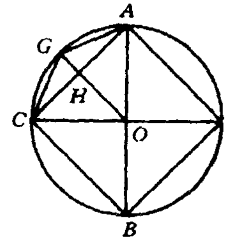
### 一、对平面几何的研究情况

1. 用割圆术研究圆周率的计算

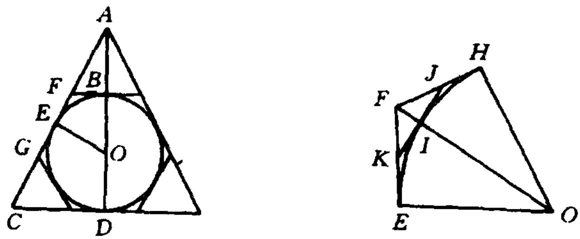
下编卷十五“割圆”一节，用屡求勾股之法分别从圆内接正六边形、圆内接正四边形与圆外切正六边形、圆外切正四边形算起，逐步加倍，如图 3.2.6 所示[①]。



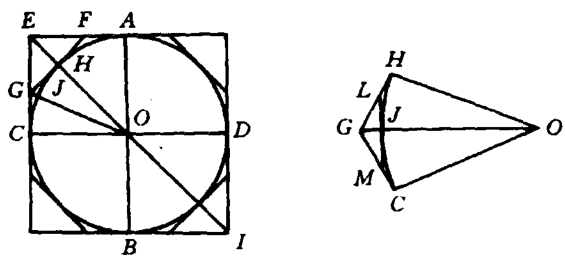

(1)圆内接六边起算图




(2)圆内接四边起算图




(3)圆外切六边起算图




(4)圆外切四边起算图

图 3.2.6

① 本图及下面表 3.2.2～3.2.5 取自：李俨. 中国数学大纲(下册). 北京：科学出版社，1958. 444；446～449

求得圆内接 $6\times2^{33}$ 正多边形之周，时：

π＝3.141 592 653 589 793 238 * ① 290 067 411 017 750 544 384。

如表 3.2.2。

**表 3.2.2　圆内接六边形起算**

| 边　数 | 每　边　长 |
|---|---|
| 6×1 ……………………… 6 | 100,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00 |
| 6×2 …………………… 12 | 51,76380,90205.04152,46977,97675,24809,66576,64 |
| $6\times2^2$ …………………… 24 | 26,10523,84440.10318,30968,12455,79097,80203,87 |
| $6\times2^3$ …………………… 48 | 13,08062,58460.28613,36306,31117,55035,03828,79 |
| $6\times2^4$ …………………… 96 | 6,54381,65643.55223,41273,12288,24160,86784,33 |
| $6\times2^5$ ………………… 192 | 3,27234,63252.97356,32859,28565,89918,98332,13 |
| $6\times2^6$ ………………… 384 | 1,63622,79207.87425,85703,98146,58952,66799,64 |
| $6\times2^7$ ………………… 768 | 81812,08052.46957,91892,48219,91003,62523,27 |
| $6\times2^8$ ………………… 1536 | 40906,12582.32819,02288,26117,96858,51900,39 |
| $6\times2^9$ ………………… 3072 | 20453,07360.67660,90823,85922,29210,20790,29 |
| $6\times2^{10}$ ………………… 6144 | 10226,53814.02739,50220,28593,95885,22439,17 |
| $6\times2^{11}$ …………… 12288 | 5113,26923.72483,46281,23299,03190,88476,79 |
| $6\times2^{12}$ …………… 24576 | 2556,63463.95130,94805,23449,01114,10631,76 |
| $6\times2^{13}$ …………… 49152 | 1278,31732.23676,62618,69476,46404,92099,97 |
| $6\times2^{14}$ …………… 98304 | 639,15866.15102,20711,60708,07126,38707,53 |
| $6\times2^{15}$ ………… 1,96608 | 319,57933.07959,09031,09381,54193,06538,00 |
| $6\times2^{16}$ ………… 3,93216 | 159,78966.54030,55288,69248,77937,23759,67 |
| $6\times2^{17}$ ………… 7,86432 | 79,89483.27021,64654,28066,68105,61111,48 |
| $6\times2^{18}$ ………… 15,72864 | 39,94741.63511,74529,75868,07068,11793,39 |
| $6\times2^{19}$ ………… 31,45728 | 19,97370.81755,90966,64039,25400,28679,64 |
| $6\times2^{20}$ ………… 62,91456 | 9,98685.40877,96728,39755,75740,61136,14 |
| $6\times2^{21}$ ……… 125,82912 | 4,99342.70438,98519,83312,36398,29963,55 |
| $6\times2^{22}$ ……… 251,65824 | 2,49671.35219,49279,37088,61769,88026,56 |

① ＊号表示以上各位数字为正确值. 下同.

续表

| 边　数 | 每　边　长 |
|---|---|
| $6\times2^{23}$ ……… 503,31648 | 1,24835.67609,74642,11723,32250,47094,18 |
| $6\times2^{24}$ ……… 1006,63296 | 62417.83804,87321,36259,06320,95878,43 |
| $6\times2^{25}$ ……… 2013,26592 | 31208.91902,43660,71929,20426,91184,02 |
| $6\times2^{26}$ ……… 4026,53184 | 15604.45951,21830,36439,49710,73209,51 |
| $6\times2^{27}$ ……… 8053,06368 | 7802.22975,60915,18279,15043,29151,42 |
| $6\times2^{28}$ …… 16106,12736 | 3901.11487,80457,59146,99658,14870,15 |
| $6\times2^{29}$ …… 32212,25472 | 1950.55743,90228,79574,52953,44068,74 |
| $6\times2^{30}$ …… 64424,50944 | 975.27871,95114,39787,32936,44199,26 |
| $6\times2^{31}$ … 1,28849,01888 | 487.63935,97557,19893,67749,89099,05 |
| $6\times2^{32}$ … 2,57698,03776 | 243.81967,98778,59946,83874,94549,53 |
| $6\times2^{33}$ … 5,15396,07552 | × 121.90983,99389,29973,41424,79379,09 |
| = | 628,31853,07179.58647,65801,34822,03550,10887,68 |

求得圆内接 $4\times2^{33}$ 正多边形之周，时：

$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ \overset{*}{4}31\ 541\ 553\ 377\ 501\ 511\ 680$。

如表 3.2.3。

**表 3.2.3　圆内接四边形**

| 边　数 | 每　边　长 |
|---|---|
| $4\times1$ …………………… 4 | 141,42135,62373.09504,88016,88724,20969,80785,69 |
| $4\times2$ …………………… 8 | 76,53668,64730.17954,34569,19968,06079,77335,23 |
| $4\times2^2$ ………………… 16 | 39,01806,44032.25653,56965,69736,95404,44818,55 |
| $4\times2^3$ ………………… 32 | 19,60342,80659.12120,39883,91127,77728,36917,22 |
| $4\times2^4$ ………………… 64 | 9,81353,48654.83602,85099,15073,54192,18045,86 |
| $4\times2^5$ ……………… 128 | 4,90824,57045.82457,60634,71621,06208,57541,32 |
| $4\times2^6$ ……………… 256 | 2,45430,76571.43985,21588,17805,28322,70716,00 |
| $4\times2^7$ ……………… 512 | 1,22717,69298.30895,07192,81109,89753,91502,87 |
| $4\times2^8$ ……………… 1024 | 61359,13525.93481,84009,35613,56118,88503,18 |
| $4\times2^9$ ……………… 2048 | 30679,60372.56953,12246,07554,48255,35780,54 |
| $4\times2^{10}$ ……………… 4096 | 15339,80637.48540,90538,77216,80698,05365,29 |

续表

| 边　　数 | 每　　边　　长 |
|---|---|
| $4\times2^{11}$ ………………… 8192 | 7669,90375.14279,11781,44963,40791,32883,11 |
| $4\times2^{12}$ ……………… 16384 | 3834,95194.62140,66148,79839,14675,43703,33 |
| $4\times2^{13}$ ……………… 32768 | 1917,47598.19195,46917,41044,43334,12743,17 |
| $4\times2^{14}$ ……………… 65536 | 958,73799.20613,37690,98012,98668,34958,07 |
| $4\times2^{15}$ …………… 1,31072 | 479,36899.61683,64374,58375,65717,71348,27 |
| $4\times2^{16}$ …………… 2,62144 | 239,68449.81013,94128,43044,37461,75283,30 |
| $4\times2^{17}$ …………… 5,24288 | 119,84224.90528,48556,85760,04932,95546,88 |
| $4\times2^{18}$ …………… 10,48576 | 59,92112.45266,93215,00909,93872,60060,65 |
| $4\times2^{19}$ …………… 20,97152 | 29,96056.22633,80224,57708,71412,02539,66 |
| $4\times2^{20}$ …………… 41,94304 | 14,98028.11316,94314,42261,07534,74329,33 |
| $4\times2^{21}$ …………… 83,88608 | 7,49014.05658,47682,47806,37746,51550,77 |
| $4\times2^{22}$ ……… 167,77216 | 3,74507.02829,23906,89737,66870,66800,32 |
| $4\times2^{23}$ ……… 335,54432 | 1,87253.51414,61961,65598,14435,01082,24 |
| $4\times2^{24}$ ……… 671,08864 | 93626.75707,30981,85390,23592,46503,06 |
| $4\times2^{25}$ ……… 1342,17728 | 46813.37853,65491,05519,01343,10246,82 |
| $4\times2^{26}$ ……… 2684,35456 | 23406.68926,82745,54362,49364,90997,84 |
| $4\times2^{27}$ ……… 5368,70912 | 11703.34463,41372,77381,62019,12483,21 |
| $4\times2^{28}$ …… 10737,41824 | 5851.67231,70686,38715,85676,64614,64 |
| $4\times2^{29}$ …… 21474,83648 | 2925.83615,85343,19361,05921,70853,94 |
| $4\times2^{30}$ …… 42949,67296 | 1462.91807,92671,59680,92096,27745,29 |
| $4\times2^{31}$ …… 85899,34592 | 731.45903,96335,79840,50314,01660,27 |
| $4\times2^{32}$ … 1,71798,69184 | 365.72951,98167,89920,25768,49928,86 |
| $4\times2^{33}$ … 3,43597,38368 | × 182.86475,99083,94960,12960,68607,70 |
| = | 628,31853,07179,58647,68630,83106,75500,30233,60 |

求得圆外切 $6\times2^{33}$ 正多边形之周，时：

π=3.141 592 653 589 793 238 466 027 300 889 141 980 416。

如表 3.2.4。

表 3.2.4　圆外切六边形起算

| 边　数 | 每　边　长 |
| --- | --- |
| 6×1 ·························· 6 | 115,47005,38379.25152,90182,97561,00391,49112,95 |
| 6×2 ························ 12 | 53.58983,84862,24541,29451,07316,98825,52661,14 |
| $6\times2^{2}$ ························ 24 | 26,33049,95174.79170,69430,52914,81943,42071,84 |
| $6\times2^{3}$ ························ 48 | 13,10869,25630.47645,71290,87449,75988,55898,42 |
| $6\times2^{4}$ ························ 96 | 6,54732,20825.94517,28785,17897,78691,92473,10 |
| $6\times2^{5}$ ···················· 192 | 3,27278,44270.62316,53306,82157,22593,98891,56 |
| $6\times2^{6}$ ···················· 384 | 1,63628,26807.58775,27407,50124,14262,93055,02 |
| $6\times2^{7}$ ···················· 768 | 81812,76501.57471,23405,28654,70206,37842,46 |
| $6\times2^{8}$ ···················· 1536 | 40906,21138.43948,71770,73895,76250,93086,70 |
| $6\times2^{9}$ ···················· 3072 | 20453,08430.18968,23098,79892,04940,73014,38 |
| $6\times2^{10}$ ···················· 6144 | 10226,53947.71650,29406,07923,61708,24007,68 |
| $6\times2^{11}$ ················ 12288 | 5113,26940.43597,23011,62489,86396,73782,62 |
| $6\times2^{12}$ ················ 24576 | 2556,63446.04020,16640,52453,71933,91505,82 |
| $6\times2^{13}$ ················ 49152 | 1278,31732.49787,77840,10560,77401,04623,48 |
| $6\times2^{14}$ ················ 98304 | 639,15866.18366,10114,03335,64137,76784,84 |
| $6\times2^{15}$ ············ 1,96608 | 319,57933.08367,07706,38925,14975,02516,94 |
| $6\times2^{16}$ ············ 3,93216 | 159,78966.54081,54184,37010,37920,29433,22 |
| $6\times2^{17}$ ············ 7,86432 | 79,89483.27028,02133,58210,87258,60420,30 |
| $6\times2^{18}$ ············ 15,72864 | 39,94741.63512,41696,96569,02814,87045,58 |
| $6\times2^{19}$ ············ 31,45728 | 19,97370.81756,00927,25467,47497,76443,54 |
| $6\times2^{20}$ ············ 62,91456 | 9,98685.40877,97973,47381,60797,42752,98 |
| $6\times2^{21}$ ········· 125,82912 | 4,99342.70438,98675,46771,78780,94612,14 |
| $6\times2^{22}$ ········· 251,65824 | 2,49671.35219,49298,82521,01688,28848,62 |
| $6\times2^{23}$ ········· 503,31648 | 1,24835.67609,74644,54902,39881,37230,82 |
| $6\times2^{24}$ ········· 1006,63296 | 62417.83804,87321,66656,43570,33969,76 |
| $6\times2^{25}$ ········· 2013,26592 | 31208.91902,43660,75728,87238,87654,28 |
| $6\times2^{26}$ ········· 4026,53184 | 15604.45951,21830,36914,51801,15160,80 |
| $6\times2^{27}$ ········· 8053,06368 | 7802.22975,60915,18238,51923,28997,10 |
| $6\times2^{28}$ ······ 16106,12736 | 3901.11487,80357,59154,41714,48425,62 |
| $6\times2^{29}$ ······ 32212,25472 | 1950.55743,90228,79575,35326,34703,68 |
| $6\times2^{30}$ ······ 64424,50944 | 975.27871,95114,39787,44471,81163,20 |
| $6\times2^{31}$ ··· 1,28849,01888 | 487.63935,97557,19893,69336,98558,02 |
| $6\times2^{32}$ ··· 2,57698,03776 | 243.81967,98778,59946,84306,12776,06 |

续表

| 边　　数 | 每　　边　　长 |
| --- | --- |
| $6\times2^{33}$ … 5,15396,07552 | × 121.90983,99389,29973,42107,76825,16 |
| = | 628,31853,07179.58647,69321,54601,77828,39608,32 |

求得圆外切 $4\times2^{33}$ 正多边形之周，时：

$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 23\overset{*}{8}\ 656\ 358\ 930\ 929\ 470\ 668\ 800$。

如表 3.2.5。

**表 3.2.5　圆外切四边形起算**

| 边　　数 | 每　　边　　长 |
| --- | --- |
| $4\times1$ …………………… 4 | 200,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00 |
| $4\times2$ …………………… 8 | 82,84271,24746.19009,76033,77448,41939,61571,38 |
| $4\times2^{2}$ ………………… 16 | 39,78247,34759.31601,38231,95245,28935,24571,94 |
| $4\times2^{3}$ ………………… 32 | 19,69828,06714.32850,61543,95042,58265,48645,84 |
| $4\times2^{4}$ ………………… 64 | 9,82536,99538.93450,82106,86642,54262,72341,58 |
| $4\times2^{5}$ ……………… 128 | 4,90972,44217.85088,82091,59507,92181,74423,84 |
| $4\times2^{6}$ ……………… 256 | 2,45449,24759.13255,04617,75106,46854,15928,90 |
| $4\times2^{7}$ ……………… 512 | 1,22720,00315.24680,39285,88731,20262,16705,82 |
| $4\times2^{8}$ ……………… 1024 | 61359,42402.34532,99741,47831,36424,34765,84 |
| $4\times2^{9}$ ……………… 2048 | 30679,63982.17733,30569,85441,63670,08749,44 |
| $4\times2^{10}$ ……………… 4096 | 15339,81088.68618,52103,46415,42325,58475,38 |
| $4\times2^{11}$ ……………… 8192 | 7669,90431.54288,19766,91468,36815,44393,20 |
| $4\times2^{12}$ …………… 16384 | 3834,95201.67141,77702,91555,12172,61821,10 |
| $4\times2^{13}$ …………… 32768 | 1917,47599.07320,60800,92296,09314,51461,06 |
| $4\times2^{14}$ …………… 65536 | 958,73799.31629,01924,52065,52620,76193,58 |
| $4\times2^{15}$ ………… 1,31072 | 479,36899.63060,59903,71697,52988,94629,44 |
| $4\times2^{16}$ ………… 2,62144 | 239,68449.81186,06069,57023,26958,93013,20 |
| $4\times2^{17}$ ………… 5,24288 | 119,84224.90550,00049,50001,14815,00233,66 |
| $4\times2^{18}$ ………… 10,48576 | 59,92112.45269,62151,58939,66012,80201,54 |
| $4\times2^{19}$ ………… 20,97152 | 29,96056.22634,13841,64962,30634,82482,20 |
| $4\times2^{20}$ ………… 41,94304 | 14,98028.11316,98516,55667,71553,86417,54 |
| $4\times2^{21}$ ………… 83,88608 | 7,49014.05658,48207,74482,17815,32914,52 |

续表

| 边　　数 | 每　边　长 |
|---|---|
| $4\times2^{22}$ ……… 167,77216 | 3,74507.02829,23972,55572,12912,74047,30 |
| $4\times2^{23}$ ……… 335,54432 | 1,87253.51414,61969,86327,44457,01335,74 |
| $4\times2^{24}$ ……… 671,08864 | 93626.75707,30982,87981,39478,58733,86 |
| $4\times2^{25}$ ……… 1342,17728 | 46813.37853,65491,18352,90645,55376,02 |
| $4\times2^{26}$ ……… 2684,35456 | 23406.68926,82745,55965,47936,05939,16 |
| $4\times2^{27}$ ……… 5368,70912 | 11703.34463,41372,77581,99294,69000,96 |
| $4\times2^{28}$ …… 10737,41824 | 5851.67231,70685,38740,90313,17704,40 |
| $4\times2^{29}$ …… 21474,83648 | 2925.83615,85343,19364,18989,81783,94 |
| $4\times2^{30}$ …… 42949,67296 | 1462.91807,92671,59631,39836,98502,52 |
| $4\times2^{31}$ …… 85899,34592 | 731.45903,96339,79840,60134,63671,66 |
| $4\times2^{32}$ … 1,71798,69184 | 365.72951,98167,89920,28844,33638,38 |
| $4\times2^{33}$ … 3,43597,38368 | × 182.86475,99083,94960,14269,29544,50 |
| = | 628,31853,07179.58647,73127,17861,85894,13376,00 |

《数理精蕴》系就四表所得四值，平均之，求得 $\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46$ 之值。下编卷二十，则只应用 $\pi=3.141\ 592\ 65$ 入算。

用屡求勾股之法应用割圆术计算圆周率理论，为我国三国魏时(公元3世纪)刘徽所创，“开我国数学发展中圆周率研究的新纪元”①。他从圆内接正六边形算起，直到圆内接正 3 072($6\times2^9$)边形时圆的面积(半径取一尺)，求得圆周率为 $\frac{3\ 972}{1\ 250}$。14 世纪，元数学家赵友钦从圆内接正四边形算起，直到圆内接正 16 384($6\times2^{12}$)边形周长，证实了早在刘宋时祖冲之(429～500)的论断 $\pi=\frac{355}{113}$ 为最密。古希腊数学家阿基米德以圆周长介于圆内接正多边

① 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 66

形与外切正多边形周长之间，算出 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$①。《测量全义》(1631 年)介绍德国数学家鲁多尔夫(Ceulen, Ludolph van, 1540～1610)于 1596 年算得 $\pi$ 的值正确到小数 20 位，其方法是利用圆内接和外切正 $15\times2^{31}$ 边形计算的。之后，他又推进到小数点后 35 位精确值②。《数理精蕴》中所得数据与精确到小数 20 位的数据相同，所用方法虽然不同，但是思路则一致。《数理精蕴》编译者谈到这二者所使用方法思路相同情况时说："可见理之至者，先后一揆；法之精者，中外一理，然则勾股即割圆之体，而割圆即勾股之用，二者交相成而两相得乎！"这段话说明这一结果有可能是编译者吸收了我国算家的研究成果。

2. 论证《大测》"宗率五"的理论根据

《大测》(1631 年)"宗率五"就是求圆内接正五边形的边长，其理论根据是："圆内五边等切形，其一边上方形与六边等形，十

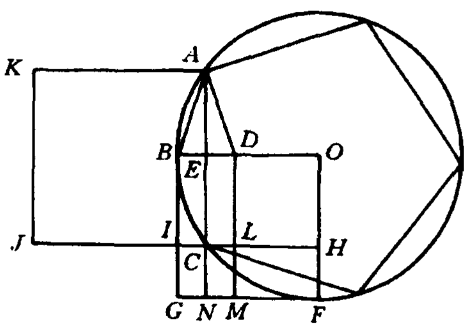



图 3.2.7

① 详见本大系副卷一。

② 梁宗巨. 数学家传略辞典. 济南：山东教育出版社，1989. 316(具体数据见阮元《畴人传》三编卷七，"华里司、固灵"。固灵即鲁多尔夫)

边等形之各一边上方形并等也。”这一定理出自欧几里得《几何原本》卷XⅢ第10题，但当时该书后9卷尚未翻译出版，故学者不知其证法。《数理精蕴》卷十六给出证明，如图3.2.7所示。

证明的大致思路是，设$OB$为半径，$AB$，$AC$分别为圆内接正十边形和正五边形一边。作$AD=AB$，显然$E$平分$BD$。由《几何要法》作正五边形方法及《几何原本》卷Ⅱ第11题知，$AD=OD$为半径$OB$被黄金分割的较大部分。再作$OB$，$AC$上正方形，则$\square DLHO=AB^2$，$▭BGMD=AB^2$，$▭LMFH=AB^2-4BE^2$，则$\square BGFO=3AB^2-4BE^2$，即$OB^2=3AB^2-4BE^2$。于是，$AB^2+OB^2=4AB^2-4BE^2=4(AB^2-BE^2)=4AE^2=AC^2$，即$AB^2+OB^2=AC^2$。

这一证明方法可能是我国学者的研究成果。清初数学家薛凤祚与孔林宗都曾研究过，其证明思路与此证法大体相同①。薛于1680年去世，而《数理精蕴》在1723年完成，可见薛、孔二人之证法在先。

3. 利用连比例四率法计算圆内接正十八边形和正十四边形边长

下编卷十六“六宗”节，为使求得的三角函数值更精密，新增求圆内接正十八边形和圆内接正十四边形边长计算法②。先谈一下圆内接正十八边形边长计算法。如图3.2.8所示，圆心角$AOB$等于60°，将此角三等分(假定)，分点为$D$，$C$，则$\angle AOC$为20°，弦$AC$即圆内接正十八边形一边。连结$AB$交$OC$于$E$，又在$EA$上取一点$G$，使$CE=CG$，则$\triangle AOC \backsim \triangle CAE \backsim \triangle ECG$，于是有比例式

---

① 高宏林. 略论孔林宗的数学成就. 见：李迪编. 数学史研究文集(第五集). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993. 60～61

② 对照本卷第二编第三章第一节杨作枚的有关工作。

$OA : AC = AC : CE = CE : EG$。

这就叫“连比例四率法”。

设 $OA = r$，$AC = x$，由上式可得

$$CE = \frac{x^2}{r},\ EG = \frac{\left(\frac{x^2}{r}\right)^2}{x} = \frac{x^3}{r^2},$$

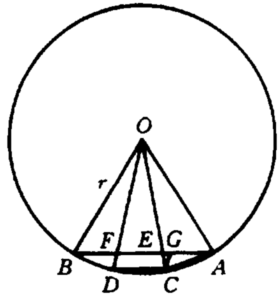


图 3.2.8

又因为 $AC = DC = BD = BF = AE$，$DC = FG$（因 $FD // GC$），从而可得

$$AB = 3AC - EG,$$

即
$$r = 3x - \frac{x^3}{r^2}。$$

整理得
$$x^3 - 3r^2x + r^3 = 0。$$

设 $r = 10^5$，求得此方程正根的近似值 $x = 34\ 729$。

圆内接正十四边形边长求法也使用“连比例四率法”。如图 3.2.9 所示，圆心角 $AOD$ 等于 $\frac{3}{7} \times 180°$，$AB = BC = CD$，则 $\angle AOB = \frac{1}{7} \times 180°$，$AD$ 交 $OB$ 于 $E$，又作 $EF = EH = AB$，$OG = OF$，易证 $\triangle AOB \backsim \triangle EAB$（$\cong \triangle FEH$）$\backsim \triangle HFG$，从而有比例式

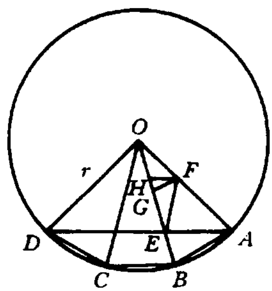


图 3.2.9

$$OA : AB = AB : BE = HF : HG。$$

又 $BE = HF$，故 $OA$，$AB$，$BE$，$HG$ 为连比例四率，设 $OA = r$，$AB = x$，则 $BE = \frac{x^2}{r}$，$HG = \frac{x^3}{r^2}$。又因为 $\triangle FEH \cong \triangle FOG$，故 $OG = EH = AB$，于是有

$$OB = OG + EH - HG + BE,$$

即
$$r = 2x - \frac{x^3}{r^2} + \frac{x^2}{r}。$$

整理得

$$x^3-rx^2-2rx+r^3=0。$$

书中令$r=10^5$，解此方程求得正根近似值$x=44\ 504$。它就是圆内接正十四边形一边之长。这个三次方程是既约的，不能用尺规作出$x$。因此所得结果只能是近似的。正十八边形也不能用尺规作出。

《数理精蕴》编译者说：

“尔来西法对数表内有设连比例四率以求内容七边九边之法，因推广其理，于六宗率之外增求内容十八边形十四边形之法。”

由此可见，“连比例四率法”是由西方传来的，而求圆内接正十八、正十四边形边长近似值之法是中国学者自己的研究成果。此二结果作用很大，通过它们以及再求出的圆内接正九、正七边形边长，可使用“六宗率”、“三要法”、“二简法”求出360个角正弦值，最小者为15分。又增一新法(即求本弧三分之一之正弦)再求出15分的三分一，即5分之正弦，只缺1分到4分的正弦值，比原法求120个正弦，且最小者为45分的精度大为提高。

此外，“连比例四率法”对我国清代学者的影响很大，如明安图、汪莱、董佑诚等在无穷级数研究方面所取得的突出成就，都在不同程度上受到此法的启示。

4. 证明三角学中新增的计算公式

《数理精蕴》下编卷十六“三要”一节新增有“有本弧之正弦，求其三分之一弧之正弦”之法。

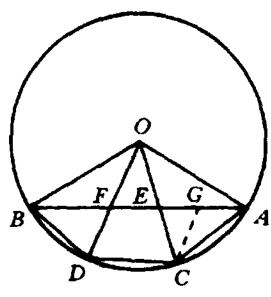



图 3.2.10

证明方法，如图3.2.10所示，设$AB=2C_{3\alpha}$为任意弧$3\alpha$的通弦，则$AC=2C_\alpha$为$\alpha$弧所对之通弦。由圆内接正十八边形边长的求解过程知，

$$AB=3AC-EG。$$

从而可得

$$2C_{3\alpha}=3\cdot 2C_{\alpha}-\frac{8C_{\alpha}^{2}}{r^{2}},$$

即
$$r^{2}C_{3\alpha}=3r^{2}C_{\alpha}-4C_{\alpha}^{3}。$$

这样，已知 $r$ 和 $C_{3\alpha}$，解此方程可求得 $C_{\alpha}$ 的值。我们知道，当 $r=1$ 时，$C_{\alpha}=\sin\alpha$，$C_{3\alpha}=\sin 3\alpha$，故该公式变成

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^{3}\alpha,$$

即三角学中三倍角正弦公式。

本节还有新增"有本弧之余弦，求倍弧之余弦及半弧之余弦"法，即三角学公式

$$\cos 2\alpha=2\cos^{2}\alpha-1,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}。$$

这两个公式证明的大致思想是相同的，我们这里仅给出第一个公式的证明。如图3.2.11所示，$AO\perp OC$，$\angle AOD=\angle DOB=\alpha$，$BG\perp OA$，$EH\perp OA$，$BF\perp OC$，则 $\mathrm{Rt}\triangle AEO\backsim\mathrm{Rt}\triangle EHO$，从而得 $\frac{OA}{OE}=\frac{OE}{OH}$，所以 $OE^{2}=OA\cdot OH$，$AG=2AH=2\left(OA-\frac{OE^{2}}{OA}\right)$，$OA-AG=OG$。又 $OG=BF$，从而有 $BF=OA-2\left(OA-\frac{OE^{2}}{OA}\right)=\frac{2OE^{2}}{OA}-OA$。

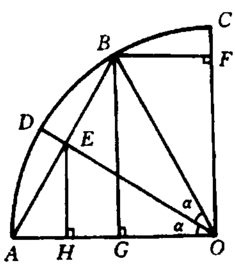


图 3.2.11

令 $OA=1$，则 $OE=\cos\alpha$，$BF=\cos 2\alpha$，于是有

$$\cos 2\alpha=2\cos^{2}\alpha-1。$$

5. 计算椭圆面积公式

《数理精蕴》上编卷三《几何原本》八第十二阐述了椭圆面积，说："凡圆面径与椭圆高度等者，其面积互相为比之比例，即同于

函两形各作切方形互相为比之比例，又同于圆形径与椭圆形小径互相为比之比例也。”如图 3.2.12 所示，圆 $EMGN$ 与椭圆 $EFGH$ 分别内切于正方 $IJKL$ 与长方形 $ABCD$，所谓两形“高度等”，也就是说，圆的直径与椭圆长轴相同。设 $S_{圆}$，$S_{椭}$ 分别表示圆和椭圆面积，$a$，$b$ 分别表示长、短半轴，则这段话表示：

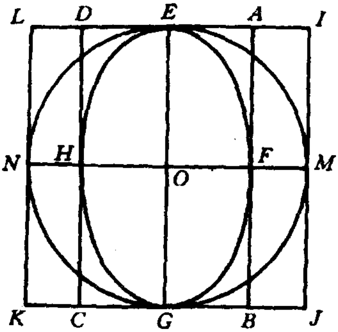


图 3.2.12

$$\frac{S_{圆}}{S_{椭}}=\frac{\square IJKL}{\boxed{\phantom{AB}} ABCD}=\frac{(2a)^2}{2a\cdot 2b}=\frac{a}{b}。$$

这段话虽未说出椭圆面积公式，但从其比例式可推出

$$S_{椭}=\frac{b}{a}S_{圆}=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab。$$

这种计算公式推导的理论根据是，该卷中《几何原本》第八的定理“平行线内两面形互相为比例，同于其底界互相为比之比例”。此定理是对直线形而言的，这是编译者借用来解曲线形问题，显然编译者已有积分萌芽思想。

**二、对立体几何的研究情况**

1. 讨论了正多面体的各种情况的计算结果

《数理精蕴》下编卷二十五“各体形总论”中给出圆球与五种正多面体的体积、直径、棱长在多种情况的计算结果，以备后面计算时用。若用 $d$ 和 $S$，$V$ 表示圆球的直径、棱长和体积，$S_4$，$V_4$，$S_6$，$V_6$，$S_8$，$V_8$，$S_{12}$，$V_{12}$，$S_{20}$，$V_{20}$分别表示正四、正六、正八、正十二、正二十面体的棱长和体积，则其计算结果数据如下：

若 $d=S_4=S_6=S_8=S_{12}=S_{20}=1\ 000$，则

$V=523\ 598\ 775$,

$V_4=117\ 851\ 129$,

$V_6=1\ 000\ 000\ 000$,

$V_8=471\ 404\ 521$,

$V_{12}=7\ 663\ 118\ 903$,

$V_{20}=2\ 181\ 694\ 969$。

这些结果都很准确，精度高超过当时所能见到数据。如当 $S_4=S_6=S_8=S_{12}=S_{20}=100$ 时，罗雅谷《测量全义》和梅文鼎《几何补编》中数据分别为：

| | |
|---|---|
| $V_4=117\ 472.5$, | $V_4=117\ 851$ 弱, |
| $V_6=1\ 000\ 000$, | $V_6=1\ 000\ 000$, |
| $V_8=471\ 425$ 有奇, | $V_8=471\ 404$, |
| $V_{12}=7\ 686\ 389$, | $V_{12}=7\ 682\ 215$, |
| $V_{20}=523\ 809$; | $V_{20}=2\ 181\ 693$。 |

卷二十九“各等面体互容”一节研究正多面体互容问题。

就其研究内容与体例来说，比梅文鼎《几何补编》更丰富，更系统详细；就图形来说，也更清晰。关于正多面体的讨论是《数理精蕴》对几何研究的最精彩部分之一，引人入胜，值得进一步探讨。

2. 计算椭球体的体积

《数理精蕴》上编卷三《几何原本》第十二讨论椭球体体积的计算，其依据是：“凡椭圆体之大径与圆球体径相同者，其二体积之比例即同于椭圆体小径所作方面与圆球体径所作方面之比例也。”如图 3.2.13 所示，椭圆体 $ABCD$ 与圆球 $AECF$ 的直径相同，用任一平面去截这两个球体，则体积之比与两个截面面积之比相同。这就是著名的卡瓦列里原理，我国叫祖暅之原理，即“缘幂势既同，则积不容异”。祖暅之是 5～6 世纪人，因此后者早于前者 1 100 多年。《数理精蕴》中虽没有直接给出公式，但若设椭圆

体长半轴为$a$，短半轴为$b$，体积为$V_{椭}$，则实际上由比例式

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{V_{椭}}=\frac{\pi a^2}{\pi b^2}$$

立得　$V_{椭}=\frac{4}{3}\pi ab^2$。

《数理精蕴》对几何研究也有不足之处。首先，上编卷二至卷四的《几何原本》与欧几里得的《几何原本》名同实异，既没有讲公理，也没有对各命题进行十分严密的逻辑证明，定理的安排也不十分注意系统性。另外，尚有个别结论不正确。如卷三第十五命题“凡椭圆体大径与圆球体之径等者，其椭圆体外面积与球体外面积之比例，即同于椭圆体小径与球体全径之比例”就是错误的，由此推出的椭圆体表面积公式$S=4\pi ab$也是不对的。

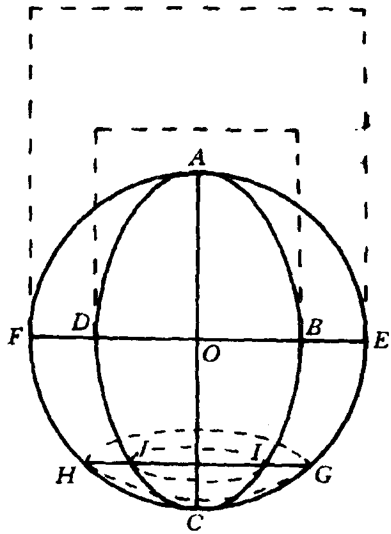



图 3.2.13

## 第五节　测量与物理问题

这一节介绍一下《数理精蕴》中有关测量和物理问题，先谈测量问题。

测量方面的知识主要放在下编卷十八和上编卷四《几何原本》十二中叙述。测量的方法大致有两种：勾股测量和三角度数测量，都是解决有关间接测量的。

“勾股测量”的方法我国早已有之，《周髀算经》中就有“偃

矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远”之说①。

《数理精蕴》中的测量工具“矩度”的构造，在上编卷四《几何原本》十二中已作说明，如图 3.2.14 所示。

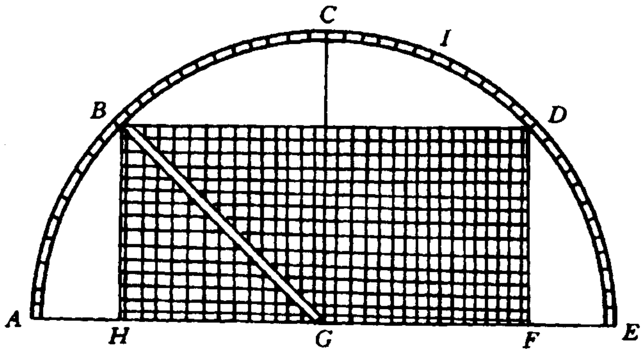



图 3.2.14

$ABCDEG$ 为半圆，半圆周分成 180 度，每度分成 60 分。矩形 $BHGFD$ 是由两个正方形组成，将 $HB$ 分成 100 等份，$HF$ 分成 200 等份，分别过分点作与直径 $AE$、半径 $GC$ 的平行线，$GB$ 为游表，将其分为 100 等份。将此仪器后面作一垂线记号，以挂坠线，如 $I$ 处。

用“矩度”测量时，先定仪器、标杆与地面垂直，其法以坠线为准。如果地面不平坦，则必须记下某处与人目视线相平。

进行勾股测量时，有一次用矩度即可，也有累次使用的；有时不用矩度而用表，即杆，表也有相等和不相等两种情况。如“勾股测量”节第一题就是用一次矩度便可测出所求结果的。原题是：

“设如有一旗杆，欲测其高，但知距旗杆之远为三丈，问得高

① 详见本大系卷一有关内容。

几何？”（如图 3.2.15）

**解**：利用矩度上坠线以定其半径所在线段 $DE$ 与地面平行。设 $A$ 为旗杆顶，$DC=d$（4 尺）为目高，$AG=x$，旗杆高 $AB=h$。利用矩度测得旗杆顶与距地平分 $EF=b$（40 分），中心平分距分 $DE=a$（50 分），又测 $DG=c$（3 丈），利用 $\mathrm{Rt}\triangle AGD\backsim\mathrm{Rt}\triangle FED$ 得

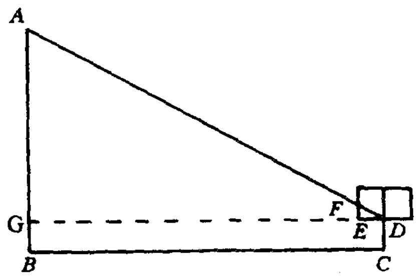



图 3.2.15

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x},$$

故　$$h=x+d=\frac{bc}{a}+d=\frac{40\times 3}{50}+0.4=2.8(\text{丈})。$$

重矩测量是用两次矩度之值与已知值来计算所测物数据的，这里又分从所测物一侧和两侧测量两种情况。例如本节第四题：

“设如一墙，欲知其远，用重矩之法测之，问墙之远得几何？”（如图 3.2.16）

**解**：设 $AB$ 为墙，$ED$ 为地平线，$EB$ 为目高。在 $C$ 处测得矩地平分 $FG=b$（40 分），中心距地矩地平分 $CG=a$（50 分）；在与 $C$ 同一侧的 $D$ 处测得上述两数据　$HI=b'$（24 分），$DI=a'$（50 分），又测 $CD=d$（1 丈）。再设 $C$，$D$ 两处距墙之远 $CE=x$，$DE=y$。作 $HJ\parallel DE$ 交 $AC$ 于 $J$，$JK\perp DE$ 交于 $K$，又作 $HL\parallel AC$ 交 $DE$ 于 $L$。令 $IL=c$，则由 $\mathrm{Rt}\triangle FGC\backsim\mathrm{Rt}\triangle HIL$，得

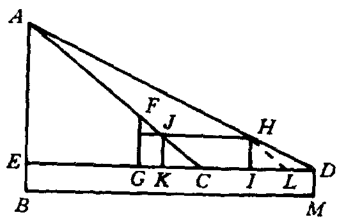



图 3.2.16

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{c},$$

故 $c=\frac{ab'}{b}=\frac{50\times 24}{40}=30$。

又由 Rt$\triangle HIL\cong$Rt$\triangle JKC'\backsim$Rt$\triangle FGC\backsim$Rt$\triangle AEC$，$\triangle HLD\backsim\triangle ACD$，$\triangle ACD\backsim\triangle AJH$，得

$\frac{DL}{IL}=\frac{DC}{CE}$，即 $\frac{a'-c}{c}=\frac{d}{x}$，$x=\frac{1\times 30}{50-30}=1.5$(丈)；

或 $\frac{DL}{DI}=\frac{DC}{DE}$，即 $\frac{a'-c}{a'}=\frac{d}{y}$，$y=\frac{1\times 50}{50-30}=2.5$(丈)。

本题属于从所测物一侧用重距法进行勾股测量的。

本节第五题是从所测物两侧用重距法测量的。原题是：

“设如有一石，欲知其远，不取直角，于左右两处横量三十九丈，测之，问两处各距石几何?”(如图 3.2.17)

**解**：设 $A$ 为所测之石，$B$，$C$ 为右左立矩之处，$BC=d$(39 丈)。在 $B$ 处测得矩度中心矩分 $ED=a$(37.5 分)，斜矩分 $BE=b$(62.5 分)；在 $C$ 处又测上述两数据分别为 $GF=a'$(11.25 分)，$CF=b'$(51.25 分)。设右左距石之远 $BA=x$，$AC=y$，作 $AH\perp BC$，令 $HB=e$，$HC=f$. 由于 Rt$\triangle DEB\backsim$Rt$\triangle HBA$，Rt$\triangle GCF\backsim$Rt$\triangle HAC$，故有

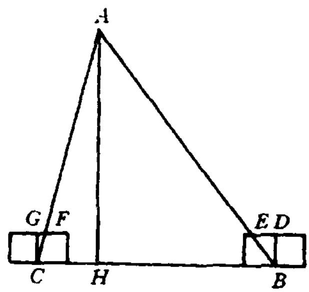


图 3.2.17

$$\frac{x}{e}=\frac{b}{a},\quad 从而\quad e=\frac{a}{b}x, \qquad ①$$

$$\frac{y}{f}=\frac{b'}{a'},\quad 从而\quad f=\frac{a'}{b'}y。 \qquad ②$$

①+②，得

$$d=e+f=\frac{a}{b}x+\frac{a'}{b'}y,$$

亦即
$$\frac{d}{x}=\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\cdot\frac{y}{x}。 \qquad ③$$

连结 $EF$，则 $EF /\!/ BC$，故有

$$\frac{y}{x}=\frac{b'}{b}. \quad ④$$

④代入③，得

$$\frac{d}{x}=\frac{a}{b}+\frac{a'}{b}=\frac{a+a'}{b}。$$

从而得 $x=\frac{bd}{a+a'}=\frac{62.5\times 39}{37.5+11.25}=50$(丈)。

同理可得 $y=\frac{b'd}{a+a'}=\frac{51.25\times 39}{37.5+11.25}=41$(丈)。

用表测量时，分表相同和不相同两种情况。

本节第八、九两题是用相同两表测量的(如图 3.2.18)，其水平不超过《海岛算经》，故从略。

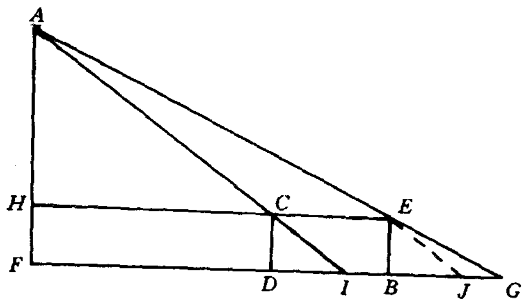



图 3.2.18

“三角度数测量”所用的方法主要是解三角形，以角度为准，割圆八线为比例。三角测量的适应范围比较广阔，不仅“物之高深广远可得”，而且“七政之躔度，天地之形体，俱可而测之”。角度测量是三角测量中首先要解决的问题，操作时，必须“取资于仪器，全圆仪、半圆仪、象限仪，虽为体不同，其为用则一”。具体测量时，仍然用仪器上的坠线定仪器水平，然后测量计算。这一节用十二个例题分别介绍不同情况的三角测量问题。

本节第五题使用了两次仪器，原题是：

“设如一石，欲知其远，不取直角，于左右两处横量五十丈测之，问两处各距石几何？”（如图 3.2.19）

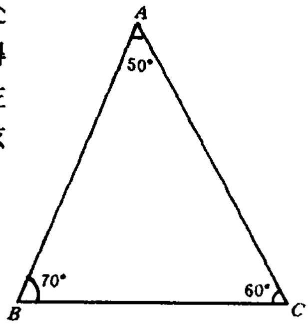


图 3.2.19

**解**：设 $A$ 为石，$BC=50$ 丈，在 $C$ 处测得 $\angle BCA=60°$，在左边 $B$ 处测得 $\angle ABC=70°$，则立得 $\angle BAC=50°$。令左右距石之远 $AB=y$，$AC=x$，根据正弦定理，

$$\frac{\sin 50°}{\sin 70°}=\frac{50}{x}, \qquad x=61.33(\text{丈});$$

$$\frac{\sin 50°}{\sin 60°}=\frac{50}{y}, \qquad y=56.53(\text{丈})。$$

《数理精蕴》的编译者又给出一种解法。其解法为：

$$\frac{\cot 70°+\cot 60°}{\csc 60°}=\frac{50}{x}, \qquad x=61.33(\text{丈});$$

$$\frac{\cot 70°+\cot 60°}{\csc 70°}=\frac{50}{y}, \qquad y=56.53(\text{丈})。$$

编译者们还说明了这种算法的理论根据（如图 3.2.20）。令 $\angle ABC=\beta$，$\angle ACB=\alpha$，边 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，分别在 $A$，$B$，$C$ 三处安置仪器，由割圆八线定义知

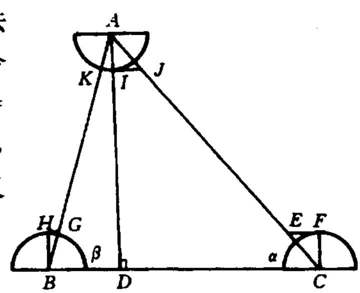


图 3.2.20

$$EF=\cot\alpha=IJ,$$

$$CF=\csc\alpha=AJ,$$

$$HG=\cot\beta=KI,$$

$BG=\csc\beta=AK$，从而可得 $KJ=KI+IJ=\cot\beta+\cot\alpha$，又由 $\triangle AKJ\backsim\triangle ABC$，得

$$\frac{KJ}{AJ}=\frac{a}{b}，即\frac{\cot\beta+\cot\alpha}{\csc\alpha}=\frac{a}{b}；$$

$$\frac{KJ}{AK}=\frac{a}{c}，即\frac{\cot\beta+\cot\alpha}{\csc\beta}=\frac{a}{c}。$$

这两个公式非常新奇，很少见。即使在现在的教科书中也很难找到。它对于直接应用两组两角一夹边求其它两边，有一定的实用价值。实际上，它们是正弦定理的变形，因为：

$$\begin{aligned}\frac{\cot\beta+\cot\alpha}{\csc\alpha}&=\frac{\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\frac{1}{\sin\alpha}}\\&=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\beta}\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]}{\sin\beta},\end{aligned}$$

亦即

$$\frac{\sin A}{\sin\beta}=\frac{a}{b}。$$

第七个题目是欲测某物之高，但其底部不能到达，又不能退步，需要三次安放仪器测之方可。原题是：

“设如远望一山，欲知其高，不得退步，爰取左右两处横量一百丈，先求斜距测之，问山之高得几何？”（如图 3.2.21）

**解**：设 $A$ 为山顶，因不能退步测量，取 $B$，$C$ 左右两处安放仪器，量之$\angle B=86°53'$，$\angle C=78°07'$，$BC=100$ 丈。令斜距 $AB=c$，因

$$\angle A=180°-(86°53'+78°07')=15°,$$

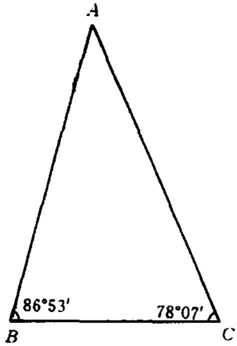
由正弦定理得

$$\frac{\sin 15°}{\sin 78°07'}=\frac{100}{c},\quad c=378.09(丈)。$$

如果要求山高 $h$，在 $B$ 处不动，再测山顶与地平所张之角为 51°，利用正弦定理得

$$\frac{\sin 90°}{\sin 51°}=\frac{c}{h}。$$

于是　$h=293.83$(丈)。



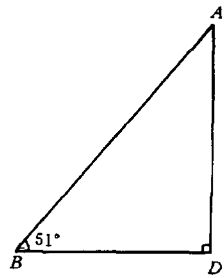




图 3.2.21

三角度数测量方法比较灵活，如本节第九题就给出三种方法。原题是：

“设如东西二树，欲知其相距之远，测处距西树五十丈，距东树七十丈，问二树相距几何？”

**解法一**：(如图 3.2.22)$B$，$A$ 为东西两树，在 $C$ 处安放仪器，量得$\angle C=50°$，$BC=70$ 丈，$AC=50$ 丈。具体算法是：

$70+50=120$，$70-50=20$，

$\frac{1}{2}(180°-50°)=65°$。

由公式　　$$\frac{120}{20}=\frac{\tan 65°}{x}$$

算得　$x=35\ 742$(此处三角圆半径为 10 万)。这里的 $x$ 为半较角(即两角差之半)之正切。查正切函数表得半较角度数为 $19°40'$。然后算得

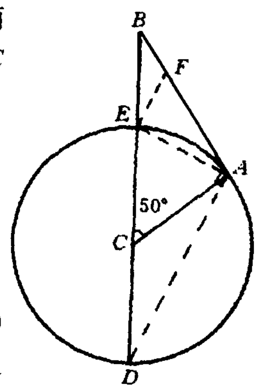



图 3.2.22

$$\angle B=65°-19°40'=45°20',$$

$$\angle A=65°+19°40'=84°40'。$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin 45°20'}{\sin 50°}=\frac{50}{AB}。$$

则两树相距　$AB=53.85$（丈）。

此处所使用的公式即为解三角形的正切定理，书中也给出了证明。证法如下：

以 $C$ 为圆心，$AC$ 之长为半径画圆交 $BC$ 于 $E$，交 $BC$ 延长线于 $D$，连结 $AE$，$AD$，并作 $EF\parallel AD$ 交 $AB$ 于 $F$。$\triangle ABC$ 的三角为 $A$，$B$，$C$，其对边分别为 $a$，$b$，$c$，于是

$$AC=CE=CD=b,$$

$$BD=a+b,$$

$$BE=a-b,$$

$$\angle CEA=\frac{1}{2}\angle DCA=\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\angle EAB=A-\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(A-B)。$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle EAD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle FEA$ 中，

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{AD}{AE},\ \tan\frac{A-B}{2}=\frac{EF}{AE}。$$

又　$EF\parallel AD$，所以$\triangle BEF\backsim\triangle BDA$。故有

$$\frac{BD}{BE}=\frac{AD}{EF}=\frac{\frac{AD}{AE}}{\frac{EF}{AE}}。$$

从而可得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}。$$

梅文鼎与孔林宗曾讨论过正切定理，他们叫“切线分角法”，虽然证法稍异，但精神是一致的[①]。

**解法二**：（如图 3.2.23）作 $AD\perp BC$，在 $Rt\triangle ADC$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{50}{AD}.$$

因此得 $AD=38.3$（丈）。又

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{50}{CD},$$

得 $CD=32.14$（丈）。于是

有 $BD=70-32.14=37.86$（丈）。

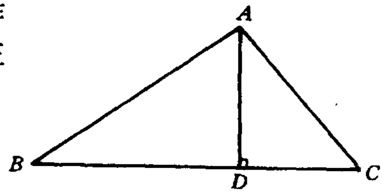



图 3.2.23

在 $Rt\triangle ADB$ 中，由勾股定理，得

$$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=53.85\text{（丈）}。$$

《数理精蕴》的三角形解法中没有余弦定理，此处是把三角形分成两个直角三角形，分两次解，这与余弦定理（在锐角情况下），实质上是相同的。因为，若用 $a$，$b$，$c$ 分别表示角 $A$，$B$，$C$ 所对之边，则

$$AD=b\sin C,\ CD=b\cos C,\ BD=a-b\cos C。$$

由此可得

$$(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

亦即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

**解法三**：（如图 3.2.24）由公式

$$\frac{50}{70}=\frac{\csc 50^\circ}{x},$$

得 $x=182\ 757$（三角圆半径为 10 万）为$\angle 1$ 和$\angle 2$ 的正切之和。

---

① 高宏林．略论孔林宗的数学成就．见：李迪编．数学史研究文集（第五集）．呼和浩特：内蒙古大学出版社和台湾九章出版社，1993．61～62

再由 $\tan\angle 1+\tan\angle 2-\cot 50°=182\ 757-83\ 910=98\ 847=\cot B$。

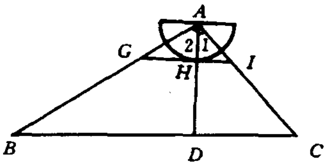



图 3.2.24

查表得$\angle B=45°20'$。由正弦定理，得

$$\frac{\sin 45°20'}{\sin 50°}=\frac{50}{c}。$$

因此，两树之远　$c=53.85$(丈)。

在《数理精蕴》上编卷四《几何原本》十二中，还给出平面地图画法和地图按比例缩小法。

平面地图画法主要使用测量中的交会法(如图 3.2.25)。其测绘程序是，先选定能看到所测之物 $E$，$F$ 两处，分别安置仪器。先自 $E$ 点测出 $G$，$H$，$I$，$J$ 四点对水平线所张之角，然后在 $F$ 处再看这四点，分别测出与水平线所张之角，这样在平面图上按所定

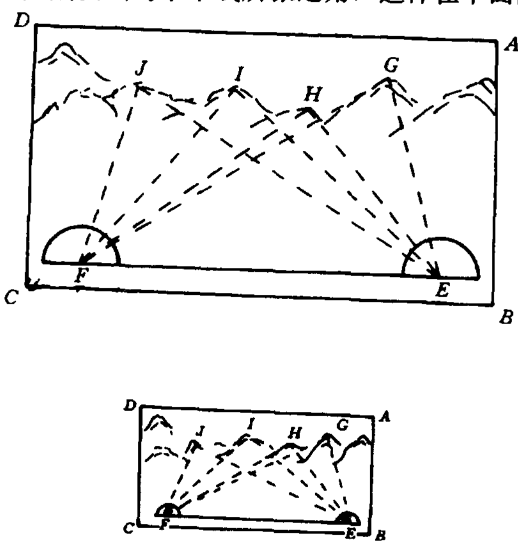



图 3.2.25

比例画出水平距离 $EF$ 以及所测这些角，分别交于 $G$，$H$，$I$，$J$，这就是地面上所测物在地图上的位置。

《数理精蕴》还介绍用平板仪测绘地图的方法，原理与现代测量学有关内容完全相同。

地图的放缩法是，先把大地图画成小方格，在要缩小(或放大)的图纸上，也按比例画成同样多的正方形，然后对每一个小正方形把大地图缩小，整个图画完后，就把原地图缩小。放大的方法也是这样。

另外，《数理精蕴》下编卷四十“正弦线”一节中“简平仪下盘作气节线法”、“简平仪下盘欲作时刻线法”以及“画日晷法”等都是与测量有关的仪器制作问题，限于篇幅，这里不再赘述。

《数理精蕴》下编卷三十“各体权度比例”一节着重讲物理问题。至于说为什么要研究它，编译者说：“数学至体而备，以其综线面之全，而尽度量衡之用。”也就是说研究数学的目的在于应用，解决生产实践中所提出的许多计算问题。各物权度比例就是现代物理学中物质的密度，这里是以每条棱为一寸的正方体作为体积单位的。有了权度，就可以解决许多有关计算问题，“凡物知其体积，即知其重轻；知其重轻，即知其体积，而权度无遁情也”。书中列出 32 种物质的密度(见表 3.2.6)。

**表 3.2.6**　　两/立方寸

| 物质 | 密度 | 物质 | 密度 | 物质 | 密度 | 物质 | 密度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 赤金 | 16.8 | 熟铁 | 6.73 | 红玛瑙 | 2.2 | 白檀 | 0.83 |
| 纹银 | 9 | 高锡 | 6.3 | 砗磲 | 1.52 | 紫檀 | 1.02 |
| 水银 | 12.28 | 六锡 | 7.6 | 青石 | 2.88 | 花梨 | 0.87 |
| 红铜 | 7.5 | 倭铅 | 6 | 白石 | 2.5 | 楠木 | 0.48 |
| 白铜 | 6.98 | 里铅 | 9.93 | 红石 | 2.56 | 黄杨 | 0.75 |
| 黄铜 | 6.8 | 白玉 | 2.6 | 象牙 | 1.54 | 乌木 | 1.1 |
| 钢 | 6.73 | 金珀 | 0.8 | 牛角 | 1.9 | 油 | 0.83 |

续表

| 物质 | 密度 | 物质 | 密度 | 物质 | 密度 | 物质 | 密度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 生铁 | 6.7 | 白玛瑙 | 2.3 | 沉香 | 0.82 | 水 | 0.93 |

这一节共给出12个问题，讨论体积、质量(重量)、权度三者的计算问题。

本节的第五个问题比较复杂，原题是：

“设如白玉一方，重九十三两六钱，但知阔比高多一寸，长比阔多三寸，问高、阔、长各几何?”

**解**：已知白玉权度为2.6两，列比例式

$\frac{2.6}{1}=\frac{93.6}{y}$，得　$y=36$(立方寸)即白玉体积。

又设高为$x$，则有方程

$$(x+1+3)(x+1)x=36。$$

展开整理得

$$x^3+5x^2+4x=36。$$

开带纵立方得　$x=2$。因此，白玉的长是6寸，阔为3寸。

本节第七个问题所给的条件不够，又利用别的方法求出条件后再进行计算，原题是：

“设如金镶玉炉一座，共重四十六两七钱，问金、玉各几何?”

**解**：题中未给出体积，先取盛水器皿一件，把炉放在里面，器皿截面为正方形，每边五寸。把炉取出后水面下落五分，于是可求得炉之体积为：$5^2\times0.5=12.5$(立方寸)。查表得金和玉方寸重分别为16.8两和2.6两，因此得方程

$$12.5\times2.6=32.5,$$

$$46.7-32.5=14.2,$$

$$16.8-2.6=14.2,$$

$$\frac{14.2}{1}=\frac{14.2}{x}。$$

解得 $x=1$ 寸。$12.5-1=11.5$(寸)。因此，金重为 $16.8\times 1=16.8$(两)，白玉重为 $2.6\times 11.5=29.9$(两)。

第十题的解法更复杂，原题是：

“设如有正方水桶三个，第一桶每边一尺，第三桶比第一桶每边多二寸。第三桶体积与第一桶、第二桶两桶之共积相等，问三桶水之重数各几何?”

**解**：水的权度为 0.93 两。第一桶的体积为 1 000 立方寸，于是由比例式

$$\frac{1}{0.93}=\frac{1\ 000}{x},$$

得 $x=930$ 两，即第一桶水重。

设第二桶边长为 $y$，则第三桶边长为 $y+2$，于是有

$$(y+2)^3-y^3=1\ 000。$$

整理得

$$y^2+2y=165.333\ 3。$$

开带纵平方得

$$y=11.89(\text{寸})。$$

于是第三桶每边之长为 13.89 寸。这样三个桶的体积分别为

1 000 立方寸，$11.89^3=1\ 680.91$[①]立方寸，$13.89^3=2\ 679.826$ 立方寸。重量分别为

930 两、1 563.246 两[②]、2 492.238 两。

在本章介绍《数理精蕴》内容结束时，对照我国传统数学可以作出简短结论：在计算方法(笔算)、数表、平面几何某些命题、立体几何某些规则多面体、三角和对数知识是中算先前所无，而作为设未知数建立方程为解题方法的借根方法、比例方法、盈朒

① 书中计算数据为 1 680.924，稍异。

② 书中计算数据为 1 570.993，有误，此处纠正过来。

法等我国自古有之，无论是理论或者实际操作都有过之而无不及，这一点，本大系前六卷中有关章节可以见证。至于几何及测量内容，中算从来成果甸甸，只是明代以来宝书流失殆绝或尘封高阁，无人问津，以致西方当时已见落后的数学知识编入五十三卷皇皇巨制，成为“精蕴”，后来居上，良可慨也。

# 第三章　《数理精蕴》资料的来源

《数理精蕴》基本上是一部西方传入数学的编译作品，内容丰富，部分代表了我国当时的初等数学水平。本章介绍《数理精蕴》在编纂过程中对西方数学的吸收情况以及受中国学者著作影响等。另外，也介绍参加编纂学者的概况与研究成果。

## 第一节　参加撰写的学者

在本编第一章中已介绍过，参与《数理精蕴》编纂的学者很多，主要有陈厚耀、梅瑴成、何国宗、明安图、魏廷珍、王兰生、方苞等。其中陈厚耀、梅瑴成和明安图将在后文另立专章或节进行详细介绍，这里略去。

何国宗(？～1766)，字翰如，顺天府大兴县人，康熙五十一年(1712年)中进士，改庶吉士。国宗出身于天文世家，父亲何君锡曾任钦天监五官正。从小受到家庭影响，对天文历算之学有一定研究。康熙五十一年与其兄何国柱一起随从康熙帝去承德，受命学习算法。由于成绩突出，后入蒙养斋与梅瑴成充任汇编官，主持大型历算丛书《律历渊源》的编纂工作。他经历过康熙、雍正、乾隆三朝，并任过许多职务。雍正初年(1723年)授侍读学士，再迁至内阁学士。雍正三年(1725年)受命治理黄河和大运河水患，因工程浩大，耗资上亿银两，皇上治罪，降职。雍正五年(1727年)授大理寺卿，六年恢复原职内阁学士，又改为工部侍郎。这一年又授命去修北运河减水坝。雍正九年(1731年)，因“责国宗勘

工错误，贻害民间”[①] 造成损失，又一次被革职。乾隆初年(1736年)充任算学馆、律吕馆总裁。九年(1744年)赐秩视三品，寻授左副都御史。十年(1745年)兼领钦天监监正，十三年(1748年)迁工部侍郎。康熙年间，国宗还参加过《皇舆全览图》的测量和绘制工作，受到朝臣的好评。乾隆二十一年(1756年)又授命到新疆进行测量，返回后命署左都御史。二十二年(1757年)授礼部尚书，因涉嫌查办其弟国栋案件舞弊又一次被革职，授直上书房编修。二十八年(1763年)恢复内阁学士职务。后以年事已高，不再供职，乾隆三十一年(1766年)卒。

国宗一生遭受不少挫折，但是，仍淡泊名利，忠心耿耿工作。另外，教人算法，尽力使人听懂，态度和蔼，平易近人。钱大昕曾给予高度评价：“犹有梅征君之遗风焉，可谓不骄不吝矣。”[②]

魏廷珍(1666？～1755)，字君璧，谥文简，直隶景州(今河北景县)人，幼年聪颖，学业突出，青年时代被督学李光地招入幕府，从事阅卷工作，很快以举人出身被李光地推荐入内廷，“与王兰生、梅珏成校《乐律渊源》”[③]，《乐律渊源》实为《律历渊源》之误，也就是参与大型丛书《律历渊源》的编写工作。在此书的编写过程中，魏廷珍主要任分校官。廷珍具有扎实的历算和乐律功底，康熙五十二年(1713年)成一甲三名进士，授编修，五十四年(1715年)迁侍讲于直南书房，五十六年(1717年)转侍读，五十九年(1720年)转擢詹事，复迁内阁学士。六十一年(1722年)命领两淮盐政。雍正元年(1723年)授偏沅巡抚。魏廷珍可能书生气十足，不适宜做官，因此雍正对他说：“尔清正和平，但不肯任劳任怨，今为巡抚，宜刚果严厉，不宜因循退缩”[④]。果然不出所料，因两年

① 见《清史稿》列传七十“何国宗”。

② 阮元．何国宗．畴人传．卷四十一

③④ 见《清史稿》列传七十七“魏廷珍，附任兰枝”条。

任期内处理问题不果断，雍正又告之曰："廷珍学问操守胜人，乃料理刑名钱杀非过则不及。"[①]雍正二年(1724年)召回京授盛京工部侍郎。三年(1726年)又授安徽巡抚。八年(1730年)调湖北，九年回京授礼部尚书，十年(1732年)授漕运总督署两江总督。十二年(1734年)授兵部尚书，十三年(1735年)仍调任兵部尚书。乾隆三年(1738年)授左都御史，第二年迁工部尚书，五年(1740年)"以老病乞休"[②]结束宦海生涯，返回故里。

魏廷珍一生大部分时间从事政务工作，前期在蒙养斋修书时主要任分校官，因而没有留下什么著作。乾隆十三年(1748年)被降任太常寺卿的陶正靖，赴新化途中至景州时拜谒了他，并赐诗"皇祖栽培士，于今剩几人"，还书写"林泉耆硕"榜文，以表达其对魏廷珍在蒙养斋工作成就的赞赏。

王兰生(？～1738年)[③]，字振声，别字坦斋，直隶交河人。兰生少年聪颖过人，康熙三十三年(1694年)开始任顺天府学政的李光地，对其非常赏识，补为县学禀生。康熙三十七年(1698年)李光地任直隶巡抚后，王兰生又被录入保阳书院深造，学习经诗、乐律、音韵以及中西历法算术等课程，成绩突出。他在这里还作研究工作，特别是梅文鼎此间也在这里讲学，使其受到教晦不浅，历算学问大为长进，并且成为著名学者。王兰生毕业后在这里工作，先后长达13年[④]。《律历渊源》编纂之前，康熙帝广纳历算贤士，由李光地大学士推荐，他被召入内廷，"昼日三接，遂得时受天语

---

①② 见《清史稿》列传七十七"魏廷珍，附任兰枝"条。

③ 此年代是根据诸可宝《畴人传》三编卷一"王兰生"中(乾隆)"三年薨于位"一句话推算的。李俨《中算史论丛》第二集第45页记为1679～1737。

④ 阮元《畴人传》三编卷一"王兰生"中"十三年圣祖问士文贞"这句话的年代显然不对。蒙养斋开馆是在康熙五十一年(1712年)至五十二年(1713年)间，李光地任直隶巡抚为康熙三十七年(1698年)，中间相差15年左右，因此，王兰生在保阳书院学习工作13年后再召人蒙养斋才符合实际情况。

指示"[①]接受康熙帝的教诲，讨论研究数理历法问题。康熙五十二年(1713 年)赐举人，参加会试获贡生资格。同年，蒙养斋开馆，"与编修纂事"[②]，参与《律历渊源》的编校工作，任分校官。康熙六十年(1721 年)，殿试未第，康熙帝以其"内直久，精熟性理，学问亦优"[③]，赐进士二甲一名，改庶吉士。雍正元年(1723 年)散馆授编修，三年(1725 年)署国子监司业，四年(1726 年)督浙江学政，五年迁试讲，六年转侍读，七年升侍读学士督安徽学政，九年(1730 年)迁内阁学士后又兼陕西学政。乾隆元年(1736 年)迁刑部侍郎兼署礼部侍郎。三年(1738 年)，薨于位。王兰生工作勤奋，政绩突出，"深为三朝所信遇"[④]。王兰生学识渊博，功底扎实，成为当时有声望的学者，特别是数学历法和乐律等学问尤为突出，因而"凡纂辑律吕正义、数理精蕴、音韵阐微诸书皆与焉"[⑤]。另外，他的成就在于为他人做嫁妆，对于这种甘愿奉献的精神，诸可宝曾给予较高评价："虽私家无他课纂，然以编书终其身，故凡披郤导窾，厘为一代石渠大制作者，皆侍郎所心劬目瞀者也。"[⑥]他是李光地的高足，深受其影响，爱才惜才，在皖浙陕西三省任学政时，"凡奇才弧学通知阴阳历术者，必提掇奖成之"[⑦]。

方苞(1668～1749)，字灵皋，安徽桐城人。其父方仲舒为诗人，因受家庭影响，方苞为诸生时文采已在当地有一定名声。康熙三十八年(1699 年)中举人。康熙四十五年(1706 年)会试中贡士，但是将应殿试时，因母病归里侍奉。康熙五十年(1711 年)，因编修戴名世所著《南山集·子遗录》中"有悖逆诸辞"[⑧]而为其写序，涉嫌被捕入狱。康熙五十二年(1713 年)免罪入旗。康熙帝早

①② 阮元. 王兰生. 见：畴人传三编. 卷一

③ 见《清史稿》卷二九○，列传七十七"王兰生"。

④⑤⑥⑦ 同①②。

⑧ 见《清史稿》卷二九○，列传七十七"方苞"。

闻其名，经大学士李光地推荐，他入内廷直南书房，不多久，改直蒙养斋编校御制乐律算法诸书，即《历象考成》、《律吕正义》和《数理精蕴》，主要兼分校官。由于政绩突出，康熙六十一年(1722年)任武英殿修书总裁。雍正年间，特授左中允，三迁内阁学士。后以足疾，辞上命专领修书，又寻命教习庶吉士，充一统志总裁，皇清文颖副总裁。乾隆元年(1736年)充任三礼义疏副总裁，又升任礼部侍郎，后又改为教习庶吉士。方苞受康熙帝宽大，立志在学术上有所建树来报效。他的思想和做法受到李光地的称赞，确实在编辑方面作出突出成绩。后来他热衷于政事，对国家治理朝政，富国强兵等大政方针提出不少建议。乾隆即位后，命方苞"选录明及本朝诸大家时艺，加以批评，示学子准绳"[①]。书成后乾隆定名为《钦定四书文》。年近80岁时，受侍讲衔，许归还故里休养。乾隆十四年(1749年)卒，时年82岁。方苞与王兰生同为分校官，二人关系很好，王疾逝前，二人曾住在一起。另外，他与梅文鼎的交往可能很多，对其情况了解得非常清楚，曾为梅氏写"梅征君墓表"。[②]

## 第二节　对西方数学的吸收

对西方数学成果的吸收，在《数理精蕴》中占主要成份，这一节简单介绍西方数学的内容。

### 一、《几何原本》与《算法原本》

《数理精蕴》上编卷二至卷四为《几何原本》；卷五为《算法原本》。前面我们已经说过，康熙帝在蒙养斋开馆修书时，曾赐陈厚耀、梅珏成等人参考书"《算法原本》、《算法纂要》、《同文算

---

① 见《清史稿》卷二九〇，列传七十七"方苞"。

② 见《方望溪先生全集》卷十二。

指》、《嘉量算指》、《几何原本》……”①。《数理精蕴》编写时直接采用了这些书的内容，有的内容是照搬，“甚至是整本采用”②。经过认真细致研究，证明，《数理精蕴》中《几何原本》就是对现在北京故宫博物院所藏汉文12卷《几何原本》稍加改动而成的，差别不大，甚至可以说几乎相同。为比较起见，列下表③(3.3.1)。

表3.3.1

| 故宫藏本 | 数理精蕴 | 故宫藏本 | 数理精蕴 |
|---|---|---|---|
| 卷　目 | 节　目 | 卷　目 | 节　目 |
| 一　23 | 一　24 | 七　10 | 七　10 |
| 二　14 | 二　14 | 八　12 | 八　12 |
| 三　15 | 三　15 | 九　10 | 九　10 |
| 四　23 | 四　23 | 十　16 | 十　16 |
| 五　28 | 五　28 | 十一　32 | 十一　32 |
| 六　16 | 六　16 | 十二　22 | 十二　22 |

《数理精蕴》把故宫藏本《几何原本》十二卷改为十二(节)，其内容，就连文字的叙述上都改正不多，只是一(节)中多了一个条目。

经研究，故宫藏本《几何原本》系根据1690年初法国传教士张诚和白晋给康熙帝用满语讲欧几量得几何学时所使用的教材、法国巴蒂(I. G. Pardies，1636～1673)数学著作《Elements de

① 阮元．陈厚耀．见：畴人传．卷四十一

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．275

③ 此表选自：李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．276

Geometrie》翻译、增删而成的[①②]。为说明问题起见，列出这三本书的卷节对照表[③](表 3.3.2)。

**表 3.3.2**

<table>
<tr><th>几何原本</th><th>巴蒂书</th><th>数理精蕴(上编)</th></tr>
<tr><td>一</td><td>卷一</td><td rowspan="5">卷二</td></tr>
<tr><td>二</td><td>卷二</td></tr>
<tr><td>三</td><td>卷三</td></tr>
<tr><td>四</td><td>卷四</td></tr>
<tr><td>五</td><td>卷五</td></tr>
<tr><td>六</td><td rowspan="4">卷六</td><td rowspan="5">卷三</td></tr>
<tr><td>七</td></tr>
<tr><td>八</td></tr>
<tr><td>九</td></tr>
<tr><td>十</td><td></td></tr>
<tr><td>十一</td><td rowspan="2">卷九</td><td rowspan="2">卷四</td></tr>
<tr><td>十二</td></tr>
</table>

另外，巴蒂书中第七、八两卷是谈论不可度量、级数与对数的，而且主要还是他的研究成果，故宫藏本中没有译出。故宫藏

① 刘钝.《数理精蕴》中《几何原本》的底本问题. 中国科技史料，1991，12(3)

② 韩琦. 康熙时代传入的西方数学及其对中国数学的影响：[学位论文]. 北京：中国科学院自然科学史研究所，1991

③ 韩琦.《数理精蕴》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册). 郑州：河南教育出版社，1993. 3～4

本中“第十”系编译者增加的，巴蒂书中未载[①]。

《数理精蕴》中《几何原本》与欧几里得《几何原本》相比较，内容上大体相同，但体例差别较大。前者命题的安排没有严格的系统性，证明也不苛求逻辑的严密性，内容大致与现代中学几何教科书差不多。

经研究，《数理精蕴》中《算法原本》是依据稿本《算法原本》删节而成[②]。后者共分 77 项[③]，比较系统地介绍整数论内容，基本上把欧几里得《几何原本》第七卷包揽进去。后者分 60 项，保留整数的乘法、求最大公约数、最小公倍数、比例、等差数列、等比数列等性质，其余内容删去，所剩内容和现在小学算术理论基础差不多。

## 二、借根方法、牛顿-拉弗森迭代法与方程近似解法

《数理精蕴》下编卷三十一至卷三十六介绍“借根方比例”，也就是借根方法。卷三十一开首介绍“定位法”、“加法”、“减法”、“乘法”、“除法”四节，主要讲解多项式的四则运算法则，又引入了加号、减号、等号等代数常用符号，又介绍移项、合并同类项等概念，这些都是新引进的西方数学知识。卷三十二“开诸乘方法”，利用立方表、三乘方表……九乘方表，解决三次至十次开方问题。卷三十三“带纵立方、三乘方、四乘方、五乘方”论述三次到六次方程的求解问题。这两部分“借根方比例”的基本内容，主要介绍高次方程求根方法。至于说这种高次方程解法是从哪里来的，前面已经讲过，说法不一。虽然如此，但“实际上已把牛

---

①② 韩琦.《数理精蕴》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷（第三分册）. 郑州：河南教育出版社，1993. 3～4

③ 李迪在《中国数学史简编》（沈阳：辽宁人民出版社，1984）第 276 页中认为，故宫藏本《算法原本》共分 60 项。

顿一拉弗森迭代法介绍到中国”。[①] 别外，《数理精蕴》下编卷十六中“新增按分作连比例四率法”是专为求圆内接正十八边形一边而设计的一种求三次方程根的近似解法。求圆内接正十四边形一边之长时也使用了同样方法。此法来源于中世纪阿拉伯数学家用连比例三角形求圆内接正十八边形一边的算法[②]，求近似解的方法与“借根方比例”中迭代法不同[③]。

《数理精蕴》编修以前曾有《借根算法节要》一书问世，此书可能是西洋人译后给康熙帝讲课用的。后来康熙帝又把这种方法教给梅珏成。《数理精蕴》中“借根方比例”可能是梅珏成结合自己的学习心得，依据《借根算法节要》改编而成，这是 17 世纪欧洲代数学在中国的最早译本。

### 三、对数造表法与对数表

《数理精蕴》下编卷三十八为“对数比例”，分为“对数之原”、“对数之纲”、“对数之目”、“求八线对数”和“对数用法”五部分。至于说这一部分内容是如何来的，卷首称：“对数比例，乃西士若往纳白尔所作，以借数与真数对列成表，故名对数表，又有恩利格巴里知斯者复加修订，行至数十年，始至中国。”这里若往纳白尔，即 John Napier 的音译，英国数学家，对数发明人；恩利格巴里知斯，即 Hery Briggs(1561～1630)，英国数学家。这一卷的前两部分论述对数的定义与性质；第三部分，也是主要部分，介绍中比例法、递次自乘法、递次开方法三种常用对数造表法。这些方法是巴里知斯独立创造的[④]。

《数理精蕴》中对数造表法不是直接译自巴里知斯原著，而是

---

①③　韩琦. 《数理精蕴》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册). 郑州：河南教育出版社，1993. 5

②　李俨. 中国数学大纲. 北京：科学出版社，1958. 424

④　韩琦. 《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究. 自然科学史研究，1992，11(2)：111～112

取自1628年出版的荷兰沃拉克表，是对巴里知斯著作稍加删节而成的。[①]《数理精蕴》“对数比例”中求对数方法“递次开方求假数之六”是用差分法介绍开平方的捷法，对19世纪清代数学家戴煦研究二项展开式有一定影响。

另外，《数理精蕴》中的常用对数表取自沃拉克1628年的原著，但不是照搬，而是作了适当修正。例如，沃拉克原表中有六处错误，而《数理精蕴》表中均已作了更正，可见在翻译时是非常慎重的。

《数理精蕴》下编后面附有各种数学用表，其中素因数表是一张把1～100 000的整数分解成因数乘积形式，素数放在每万的数字之后。这张表“无疑是英国数论家佩尔(John Pell，1610～1685)因数表的翻印本”[②]，是单纯为造对数表用的。“对数阐微说”云：“其不由两数相乘而得者，即度不尽之数，命为数根，各附于每万之末。必求得各数根之假数，而十万之假数始备焉……”

**四、立体几何知识**

1607年，欧几里得《几何原本》前6卷出版，不仅标志着西方数学第一次传入中国的开始，而且也系统地介绍了欧几里得的以逻辑演绎为特征的几何学知识。因为该书的后9卷[③]尚未译出，所以虽然当时也有一些涉及到立体几何知识的书，如1608年利玛窦与李之藻合译的《圜容较义》，1631年罗雅谷的《测量全义》等，但只是一些零碎知识，都没有系统给予论述。《数理精蕴》的编纂出版，记录了有关立体几何的知识，也反映了欧洲16～17世纪立体几何的成就。

---

① 韩琦.《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究. 自然科学史研究，1992，11(2)：111～112

② 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 280

③ 最后两卷不是欧几里得原作，而是拜占庭学者附加的。

《数理精蕴》中的立体几何知识主要分布在上编卷二、卷三，下编卷二十五至卷二十九以及卷三十九、卷四十等。

上编卷二中《几何原本》五的第二十二，介绍了“卡瓦列里原理”。文中说：“凡各面所成体形内，其各面俱平行，或上下面为平行而立于等积之底，其积之高又等，则其体之积亦相等。”并举出例子加以说明，尤其是在阐述相等的根据时说：“若将众尖体分为平行底之众小体，其所分众小体之底度高度必俱相等……故其全体之积亦相等也。”这部分内容译自：巴蒂的《Elemens de Geometrie》(1678)Livre Cinquieme. Des Solides 第31条[①]。《数理精蕴》上编卷三，即《几何原本》十的第十二，则利用“卡瓦列里原理”证明了椭圆旋转体的体积计算公式。这部分内容在巴蒂的著作中未载，很可能是传教士给康熙帝讲授几何学时增加的。当时我国数学典籍《九章算术》尚未发现，不可能知道“祖暅之原理”，更不可能用此原理推导椭圆旋转体体积计算公式。当时《测量全义》中也有椭圆旋转体体积计算公式，所使用的是“量椭圆体之容”方法，与上述方法完全不同。

《数理精蕴》上编卷二《几何原本》五的第四介绍了多面体中一个重要概念，即“厚角”，其定义是“凡各面相合，其每面之角相合处复成一种体角，则谓之厚角”。对于构成厚角的必要条件也给予叙述，“夫厚角必自三面合之乃成”。该卷的第五和第六还讨论了厚角的性质。第五说：“凡各面相并所成之厚角，如将各面计之，则其众角所合之分，必不足于四直角度也。”第六说：“凡等边三面所合厚角，其三面内之两角，并之，必大于一直角度也。”这里所说的厚角，从所给的定义及图形看，就是现在所说的凸多面角。第一个性质即凸多面角所有面角之和小于360°。书中还给

① 韩琦.《数理精蕴》对数造表法与戴煦二项展开式研究.自然科学史研究，1992，11(2)：118 注④

出这个性质的证明，其思路是把多面角展开摊成平面，必然小于一个周角，即 360°。这种证明方法非常直观，与现行中学立体几何教科书中证法不同。另外，需要指出的是，厚角概念与有关性质，在欧几里得《几何原本》中并未涉及到。

## 五、计算尺

《数理精蕴》下编卷四十有“假数尺”、“正弦假数尺”、“切线假数尺”和“割线假数尺”。这里的“假数尺”就是计算尺，是新传入的内容，也是我国历史上第一次记载计算尺。

对于计算尺的刻度方法、使用方法都结合例题给予说明。每一套计算尺都有两个尺子组成。如图 3.3.1 所示为假数尺，(1)为正面，(2)为反面。

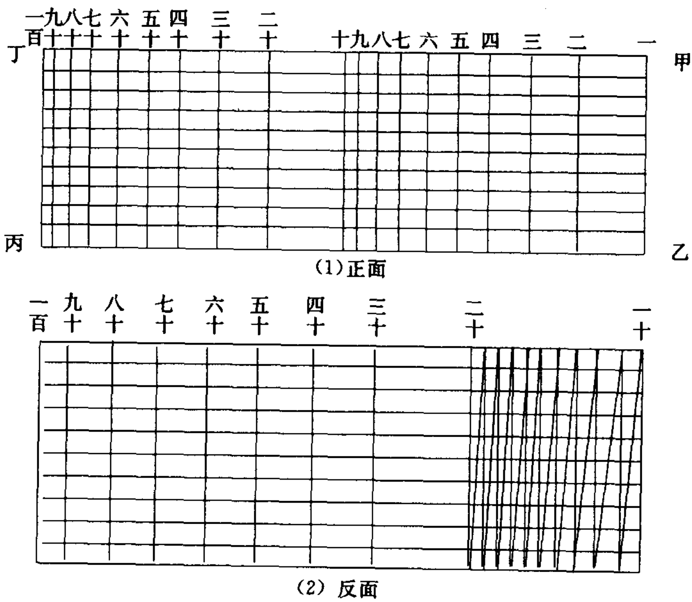



图 3.3.1 《数理精蕴》中的“假数尺”图

计算尺最早是由英国数学家甘特(E. Gunter,1581～1626)于1620年设计制造的。英国数学家温盖德(E. Wingate,1593～1656)在1628年也设计制造了类似的计算尺。现在故宫博物院还藏有清代计算尺多件，其中有一套象牙制的假数尺模型，属于甘特型的，长19厘米，宽3厘米，上面刻有“康熙御制”四字，说明此尺是康熙年间制造的①。这些计算尺的制造与当年编写《数理精蕴》中“假数尺”一定是有联系的。

## 第三节　梅文鼎及其他数学著作对《数理精蕴》的影响

我们知道，在编纂《数理精蕴》时，梅玨成担任汇编官(相当于主编)。乾隆二十二年(1757年)，梅玨成晚年整理删注程大位的《算法统宗》后辑成《增删算法统宗》11卷，第一卷“国朝算学书目”中《数理精蕴》条下自题“康熙己亥(1719年)翰林梅玨成等编”。《数理精蕴》是以“康熙御制”名义颁印的，由此可见，梅玨成在编纂过程中负主要责任，并且实际参加编写工作，否则，他是不会轻易这样写的。

梅玨成祖父是被誉为“国朝算学第一”的著名数学家梅文鼎，玨成自幼受到祖父的良好教育，其思想也深受祖父的影响。因此当梅玨成负责编写《数理精蕴》时，其指导思想自然要受祖父的影响。在编译西方传入著作时，必然要参考梅文鼎及其他数学家的著作，甚至“将梅文鼎的某些成果也辑入其中”。②这一节我们简单谈一下梅文鼎和其他著作对《数理精蕴》的影响。

---

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．274

② 刘钝．《(梅文鼎)方程论》提要．见：郭书春编．中国科学技术典籍通汇·数学卷(第四分册)．郑州：河南教育出版社，1993　317

## 一、梅文鼎著作的影响

在《数理精蕴》中有许多地方，明显可以看出在编写过程中不同程度受到梅文鼎著作及学术思想的影响，现分以下几个方面叙述。

1. 数学思想

梅文鼎数学思想的一个显著特点是数学来源于实际，数学理论具有客观性，符合事物的发展规律。他在《中西算学通序》中说：

“数学者征之于实，实则不易，不易则庸，庸则中，中则放之四海九州而准。”①

这句话反映了他对数学理论的见解符合《中庸》中“不偏之谓中，不易之谓庸”的观点。在对待中西之学的态度上也是非常客观的。他在《堑堵测量》卷二中说：

“且夫数者所以合理也，历者所以顺天也，法有可采何论东西；理所当明何分新旧。在善学者知其所以异，又知其所以同。”

梅文鼎的这种思想在《数理精蕴》中有所体现。如下编卷十五“面部五·割圆”说到圆外切正多边形与内接多边形周长，当边数无限增加时，渐渐变成圆周时说：“可见理之至者，先后一揆；法之精者，中外一理。”

《数理精蕴》中有一个明显特点，认为西学来源于中国，这种观点是康熙帝首先提出的。上编卷一“周髀经解”中谈到：

“周末，畴人子弟，失官分散，嗣经秦火，中原之典章，既多缺佚，而海外之支流（指书籍流传于海外），反得其真，此西学之所以有本也。”

又因为现在仅存典章只有《周髀》，所以把它列于《数理精蕴》之首，“以明数学之宗，使学者知中外本无二理焉尔”。梅文鼎也赞

① 梅文鼎. 绩学堂文抄. 卷二

同康熙这种观点，其《周髀算经补注》二卷也是为了“俾天下疑西学者知其说之有所自来”而作的。梅文鼎在其《堑堵测量》卷二中进一步明确指出：

“大司徒以三物教民，而数居六艺之一，秦火以后，吾中土失之，而彼反存之，至于流远派分，遂以各名其学，而不知其本之同也。”

由此可以看出梅文鼎与《数理精蕴》中观点是非常相似的。钱宝琮先生研究梅文鼎的《周髀算经补注》后，引用丁福保的话“《御定数理精蕴》为梅文穆手拟之稿”得出结论“上编之《周髀算经解》即或用乃祖(梅文鼎)《周髀补注》原稿也”[①]。梅文鼎的这种错误观点又有所发挥，在研究西方传入的几何学之后认为：“几何不言勾股，然其理并勾股也，故其最难通者，以勾股释之则明。……信古《九章》之义，包举无方。”[②] 又说：“勾股之用，于是乎神。言测量至西术详矣，究不外勾股以立算。”[③]也就是说西方几何学“无非就是中国的勾股数学”[④]。

2. 方程论

《数理精蕴》下编卷十“线部八·方程”讲解联立一次方程组，它“是根据(梅文鼎)《方程论》改写的”[⑤]。钱宝琮也有相同看法，“取法于梅文鼎的《方程论》”[⑥]。关于线性方程组的一般解法，在当时的西方仍处在摇篮之中，没有传入中国。梅文鼎在《方程论

① 钱宝琮. 周髀算经考. 见：钱宝琮科学史论文选集. 北京：科学出版社，1983. 136

②③ 梅文鼎. 梅氏丛书辑要. 卷十八. 1761

④ 梁宗巨. 几何原本序. 见：欧几里得. 几何原本. 兰纪正，朱恩宽译. 西安：陕西科学技术出版社，1990. 16

⑤ 李迪，郭世荣. 清代著名天文数学家梅文鼎. 上海：上海科学技术文献出版社，1988. 213

⑥ 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 271

发凡》中曾说到：

“近者西学骤兴，其言勾股尤备，故《九章》所载虽简而不至大谬；至若方程，别无专书可证，所存诸例，又为俗本所乱，妄增歌诀，立为胶固之法。”

潘耒也在《方程论叙》中谈到：

“《九章》中最难明者，无过于勾股方程二事。西人论勾股割圆之法详矣，方程则有所未尽，于是勿庵著论六卷，专论方程。”

这说明梅文鼎的《方程论》一书在当时“是一部有价值的著作”[①]。《数理精蕴》是一部初等数学百科全书，编辑时把梅文鼎《方程论》的成果与方法吸收进去是合乎情理的。另外，从《方程论》的分类上看，《数理精蕴》中分为“和数类”、“较数类”、“和较兼用类”、“和较交变类”以及附法，即“或有非方程之本法，而可以方程算者”，设例附其后。梅文鼎《方程论》中方程分类为“和数”、“较数”、“和较之杂”、“和较之变”四类，二者体例几乎完全相同。就方程的解法而言，《数理精蕴》是“盖用互乘者，所以齐其分，使其首数皆同，减尽而余一法一实，以得一数也”。也就是用消元法，最后变为一元一次方程求解。梅文鼎《方程论》中解法为“方程用互乘对减”，对于“对减”，“亦必有相差之数，数相差，则减不能尽，于是取其余数以为用。一为法，一为实，以法除实而得中一色”。虽然语言叙述上有别，但实质上相同。当然二者有一些不同，在方程的表示方法上，《数理精蕴》把梅文鼎的竖式改为横式，也缺少梅氏用方程解决天文测量方面的问题。

3. 勾股互求

《数理精蕴》下编卷十二、卷十三专论“勾股”，其中勾股互求部分应是梅瑴成执笔完成的。原因是：他在其《赤水遗珍》中

---

① 梅荣照. 略论梅文鼎的《方程论》. 见：自然科学史研究所数学史组编. 科学史文集(第8辑). 上海：上海科学技术出版社，1982. 157

谈到自己昔日在蒙养斋汇编《数理精蕴》时，苦思冥索，得出用带纵立方之法求解“有勾股积及股弦和较求勾股”四种方法，载入其中，也就是下编卷二十四最后的“附勾股法四条”。梅珏成在编写时，可能把梅文鼎的《勾股举隅》一书作为重要参考书，因为在卷十二、卷十三“勾股弦和较相求法上、下”中第七、十、三十四、四十三各种方法在《勾股举隅》中都有记载。另外，在“勾股积与勾股弦和较相求法”中九种方法有六种梅文鼎书中俱有。不仅如此，二者所用的公式完全相同，其证明方法也大致一样。从整体上看，就勾股互求来说，两书的证明都采用几何图形变换法。

4. 解三角形

《数理精蕴》下编卷十七“三角形边线角度相求”论述解三角形问题。这部分内容所使用的公式为正弦定理和正切定理，不用余弦定理，这一点与梅文鼎《平三角举要》处理方法相同。另外，正弦定理的证明方法以及一些题目也相同。然而正切定理的证法不一样。《数理精蕴》中的证法系采用梅珏成改进后的方法。

5. 大圆容小圆与大球内容小球

《数理精蕴》下编卷二十“曲线形”最后四个题讨论大圆内容四个、三个小圆时大圆径与小圆径互求问题。下编卷三十七“难题”中第四十三、第四十四、第四十五，讨论大圆球内各容四、六、八个小球时大圆球直径与小圆球直径互求问题。梅文鼎《几何补编》卷四“大圆容小圆法”也讨论了这些问题。两书的叙述方法相同，后者比前者涉及的问题多一些。如后者讨论了大圆内容三、四、五、六个小圆问题。

6. 正多面体

《数理精蕴》中正多面体知识分布在下编卷二十七“各等面体”，论述正四、正八、正十二、正二十面体已知边长求体积的计算公式。卷二十五“各体形总论”讨论边长为多种情况下的上述

多面体，再加正六面体的体积计算近似公式及结果。卷二十八"球内容各等面体"和"球外切各等面体"，讨论已知球径求内容、外切上述五种正多面体的棱长与体积计算问题。卷二十九"各等面体互容"、"更体形"，讨论取其一，内容其他多面体的计算问题以及球与正多面体在体积相等情况下相互变换的计算问题。这部分内容是梅瑴成根据梅文鼎《几何补编》执笔编写的[①]。从整体上看，"这三卷中几乎转录了《几何补编》的全部内容。只是个别论证比《几何补编》更为简洁一些而已"。[②]有的则认为，比较《数理精蕴》和梅文鼎的《几何补编》，前者在等面体互容方面比后者全面得多，且图形清晰。又因梅瑴成在后者末附有所录内廷秘本更精确的互容关系，因此，得出结论："《数理精蕴》所介绍的内容(多面体)并非源自梅文鼎的著作(《几何补编》)。"[③]当然，也看到多面体计算精度比较高的近似公式"应是新传入或新计算的"[④]。就目前的研究成果看，说这些内容是新传入的尚无确切证据；如果是新计算的话，梅瑴成应是主要完成者。总起来说，《数理精蕴》这部分内容受到梅文鼎的影响是肯定的，只不过程度大小而已。

7. 开方

《数理精蕴》中有关开方的内容分布在下编卷十一、卷二十三、卷二十四以及卷三十二中。前三卷中分别论述开平方、开带纵平方、开立方、开带纵较数立方和开带纵和数立方。其原理与梅文鼎《笔算》卷二"开方"和《筹算》卷二中开平方、开带纵平方、开立方、开带纵立方的筹算方法等相同。另外，开带纵立方的分

---

① 梅瑴成．赤水遗珍

② 李迪，郭世荣．清代著名天文数学家梅文鼎．上海：上海科学技术文献出版社，1988．214

③④ 韩琦．《数理精蕴》提要．见：郭书春编．中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册)．郑州：河南教育出版社，1993．6

类采用带一纵、两纵相等和两纵不等的分类法，与梅文鼎著作也完全相同。后一卷为“借根方比例·开诸乘方法和诸乘方表”。其中在论述开方法时谈及代开方法，亦即“诸乘方中，亦有可以用平方、立方之法代开者”，并举例说明。如三乘方(四次方)与平方自乘之数等，故可以用平方两次开之。又如五乘方(六次方)与平方自乘再乘之数等，亦与立方自乘之数等，故可以平方开之，继以立方开之等。但也指出，有些不可以用代开方法，如四乘方(五次方)和六乘方(七次方)，不能表成平方或立方相乘形式，因而不能用平方、立方之法代之。代开方法在利玛窦和李之藻合作编译的《同文算指》中有过记述，但是某些地方有错误。梅文鼎在其《少广拾遗》中也谈代开方法，并把前者的错误作了更正。《数理精蕴》中代开方法均正确，由此可见，在编写开方的过程中，参考了梅文鼎的上述著作是毫无疑问的。

## 二、其他著作的影响

### 1.《同文算指》的影响

《数理精蕴》下编卷八“盈朒”、卷九“借衰互征”和“迭借互征”，主要是根据《同文算指》改编而成的。钱宝琮认为：这些内容“取材于《算法纂要总纲》和李之藻《同文算指》”[①]。另外，还有人也持这种观点，认为上述内容“亦取自《同文算指》”[②]。《数理精蕴》下编卷八讨论盈不足问题，分类非常明确，首先为“单法”，分“一盈一朒”、“两盈”、“两朒”和“一朒一适足”；其次为“双套盈朒”，分“一盈一朒”、“两盈”、“两朒”、“一盈一朒”和“一朒一适足”。至于单法、双套之定义，《数理精蕴》下编卷八“双套盈朒”中讲得非常明白：

① 钱宝琮：中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 271

② 赵澄秋.《同文算指》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(第四分册). 郑州：河南教育出版社，1993. 76

“盈朒之法，皆以每人几何而盈几何；每人几何而朒几何为问……即欲先求共数，不过用一互乘以齐其分而已，故为单法；若双套则以几人几何而盈几何；几人几何而朒几何为问……若欲先求共数，则用两互乘，是以为之双套。”

《同文算指》通编卷四“迭借互征第七”所附“盈朒”中是专论盈不足问题的。它对盈不足问题也作了详细分类，但分类标题不是在前，而是在例题后。分类有三种：“一盈一不足”、“两盈两不足者”及“盈与适足及不足与适足者”。对于盈不足分成两大类问题，虽没有指出“单法”，但在叙述了旧法只立盈与不足或两盈、两不足后说“又有迭数盈朒”，用小号字对这一名词作了解释：“如几人分几许，盈几数，几人分几许，不足几数之类。”实际上这就是双套盈朒。比较《数理精蕴》这部分内容，可以说体例上完全相同。

《数理精蕴》下编卷九中研究“借衰互征”，所解决的问题是：“有总数而无分数，或有分数而无总数，或无总数分数之实率，而但有其虚率。”解决的方法是“不得不别借一衰数以为比例，然后可以得其真数，故曰借衰”。借衰的方法又有不同，有借于本数之中的，有借于本数之外的。总之，大致方法为“借彼征此，借虚征实，故曰互征”。这一卷还研究更复杂情况，原因是“原问内设数隐伏，一次借衰尚不能得其真数，故不得不借两数以比较之”。解决的方法是“先借一数与原数相较，复借一数与原数相较，然后据两较以立算而真数可得，故曰迭借”。

《同文算指》通编卷三“借衰互征法第六”所解决的问题是“数有隐伏、非衰分可得者”，方法为“则别借虚数以类征之，或合率增减，或母子射覆如藏阄。然借彼征此，借虚征实，大抵即三率之法而触类长之”。卷四“迭借互征第七”所解决的问题为“有子母杂互隐奥难知者”，方法是“两借虚数以征之”，这就是迭借互征名词的由来。

比较两书可以看出，它们不仅使用的名词完全一样，其所解决的问题以及方法，甚至某些语句也无差别。需要指出的是，《数理精蕴》把“盈朒”放在前，而《同文算指》把它放在“借衰互征”和“迭借互征”之后。后者之所以这样安排，似乎是“盈朒”中一些问题也可以用“借衰互征”方法解决。

2. 罗雅谷《比例规解》的影响

《数理精蕴》下编卷三十九和卷四十为《比例规解》，上编卷四《几何原本》第十九及第二十二也论到《比例规解》问题。前者的取材，“基本上采自《崇祯历书》中罗雅谷《比例规解》一书”①。后者取材于故宫藏本《几何原本》，系根据法国数学家巴蒂的几何书翻译的，前面已说过。

罗雅谷《比例规解》中分为十种线：第一平分线、第二分面线、第三更面线、第四分体线、第五更体线、第六分弦线（亦曰分圆线）、第七节气线（一名正弦线）、第八时刻线（一名切线线）、第九表心线（一名割线线）、第十五金线。而《数理精蕴》中《比例规解》也分为十种线：平分线、分面线、更面线、分体线、更体线、五金线、分圆线、正弦线、正切线、正割线。比较二者内容，十种线的名称完全相同，后者借用前者。但也有差别，后者把前者的第十放在第六，其他名称顺序依次往后推移。其原因很可能是第十五金线的作用“以御轻重”与前面第四分体线、第五更体线用途“以御体积”有密切联系的缘故。另外，《数理精蕴》中《比例规解》的“正弦线”部分有“简平仪下盘作气节线”与“简平仪下盘作时刻线”两部分内容，画图详尽。在罗雅谷《比例规解》中，前者虽有，但无作图，后者就根本无记载。再者，《数理精蕴》中《比例规解》最后还有画日晷法，比罗雅谷书中画法详尽得多，甚至比梅文鼎《度算》中所介绍的相关内容还要详细。这

---

① 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 281

一画法影响到后来一些天文学家的著作。还需指出的是，罗雅谷《比例规解》中分体线作法有错误，梅文鼎《度算》中已作了更正。《数理精蕴》中该问题处理与梅氏相同。由此可见，《数理精蕴》中"比例规解"内容有些出自编译者的研究成果，有些则吸收了梅文鼎的学术思想与心得。

3. 其他著作的影响

从1689年康熙帝学习《几何原本》到1723年《数理精蕴》编成刊行，这期间编译的数学书籍，除了上面提到过的《几何原本》、《算法原本》、《算法纂要总纲》、《借根方算法纂要》外，尚有《阿尔热巴拉新法》、《测量高远仪器用法》、《勾股相求之法》、《八线表根》、《比例规解》、《对数表》、《度数表》、《数表精详》等，"这些书是《数理精蕴》取材的基础"[①]。此外，梅文鼎尚有《比例数解》4卷，是专论对数著作，"已采入《数理精蕴》"[②]。

《数理精蕴》的一个显著特点是采用图解的方法来说明数学问题的立论根据，这不是受哪一部著作的影响，而是对我国传统数学优点的继承和发展。例如，上编《几何原本》，译自法国数学家巴蒂的书，收入时就增加了不少图，卷五第二十二"卡瓦列里原理"中的图就是新增加的。

① 韩骑.《数理精蕴》提要. 见：郭书春编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(第三分册). 郑州：河南教育出版社，1993. 3

② 李俨. 中算史论丛(第二集). 北京：科学出版社，1954. 204

# 第四编

# 对传统数学与西方数学的研究

本编讲述由康熙末期到乾隆前半期非官方的数学研究工作，其中有些人如陈厚耀、梅珏成都是编撰《数理精蕴》的倡导者或主力，也包括与官方有关系的北京故宫博物院所藏原始手摇计算器等数学文物。这一时期，人们研究数学的基本方向是中国传统数学和西方数学，它们既有互相影响的一面，又有各自独立的一面，甚至同一个人就存在两种独立性。因此，数学思想是复杂的。但是对传统数学的研究，在乾隆后半期逐渐占了主导地位(这是本大系第八卷前两编的主要内容)。

## 第一章　康熙末期到乾隆前期的某些工作

本章所讨论的内容是纵跨康熙末期到乾隆前期，约为1700～1770年间的数学研究情况，其中包括北京故宫博物院所藏的原始手摇计算器等文物，以及陈厚耀、梅珏成、毛宗旦等人的工作。但是，年希尧、明安图两人的工作，因有特殊重要性，故另立两个专章进行论述。

# 第一节　故宫博物院所藏手摇计算器及其他

## 一、故宫博物院所藏手摇计算器

康熙皇帝在位期间，非常重视引进外国先进的数学仪器。这些仪器进入我国以后，在功能上得到了进一步的改进，也产生了一定的影响。在1687～1722年的30多年间，我国自己制造了盘式计算器和筹式计算器。故宫博物院珍藏有10台这两种计算器[①]。法国数学家巴斯加(B. Pascal，1623～1662)于1642年创造了世界上第一台能做加减的计算器。德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz，1646～1716)于1671年左右发明了能做加、减、乘、除运算的计算器。此后，许多人在研制改良计算器方面做了大量的工作。特别是经过托马斯(K. Thomas)、W·奥德内尔等人的改良之后，产生出多种手摇计算器，风行于全世界。巴斯加计算器能够计算6位数，而故宫所藏计算器，可进行多达12位数的计算，有的适用加减乘除四则运算，有的还可以进行平方、开方运算。

故宫博物院所藏的10台计算器，外形是长方体。从结构上看，可分为盘式和筹式两种。

1. 盘式计算器

盘式计算器有6台，都是用黄铜制成的，表面有的镀金，有的镀金、银，有的是黄铜本色。

这些盘式计算器，按大小和位数又可分为两种型号：一种长55厘米，宽11.5厘米，厚4.8厘米，表面有10个圆盘，可表示10位数；另一种长60厘米，宽11.5厘米，厚4.8厘米，表面有

---

① 白尚恕，李迪．故宫珍藏的原始手摇计算器．故宫博物院院刊，1980，(7)：76～82

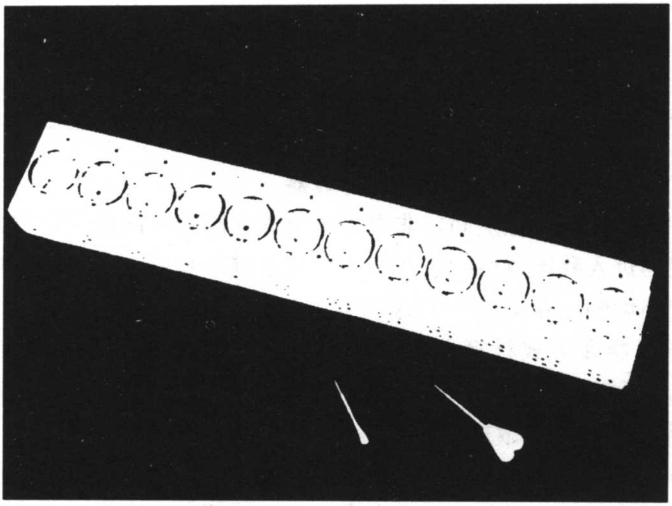


图 4.1.1

12 个圆盘，可表示 12 位数(如图 4.1.1)。每个圆盘都分上下两层，上层较小，固定不动，其上按逆时针方向刻着由 1 到 9 九个阿拉伯数码或汉字，1 与 9 之间各有一空格；上层的中央刻有汉字或拉丁拼音数位名，最小的单位是“毫”或“hao”，10 个圆盘的到“拾万”或“sevan”；12 个圆盘的到“千万”或“cienvan”。在空格中有一能上下移动的铜档片。移动档片可以看到下层圆盘上一个数码，下层是由三个同心圆分成三圈，可以转动，最外一圈露在上层之外，周围匀布 10 个小圆孔。用拔针插入小圆孔时，可以按顺时针方向转动下层圆盘(如图 4.1.2)。下层的中圈和内圈分别有顺序相反的由 0 到 9 的阿拉伯数码或汉字(如图 4.1.3)，它们正好被上层圆盘遮住，只能从其空格内看到下层圆盘两种数码的一个数码。




图 4.1.2

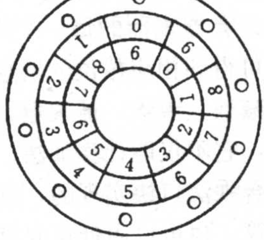



图 4.1.3

在每一圆盘之下都安装一个十齿轮(如图 4.1.4)，转动下层圆盘，齿轮也随之转动。当上层空格的读数超过 9 时，如继续转动下层圆盘，齿轮便带动左边的齿轮动一格，这样就使左边的读

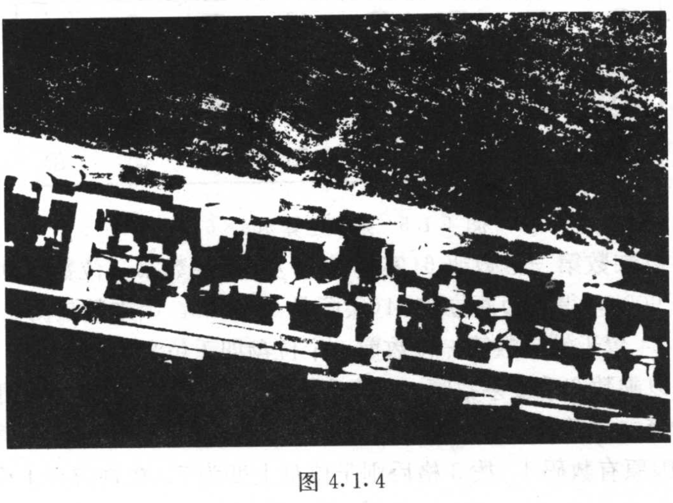


图 4.1.4

数增加 1 或减少 1。明确地说，按顺时针方向转动下层圆盘，读其中圈的数码，可体现进位，适用于加法及乘法；读其内圈的数码，可体现退位，适用于减法及除法。

在计算器表面的每一个圆盘的上方和下方各有一个扇形孔，从孔中可得到相应数位的读数。这读数可表示加数、被加数、减数、被减数、乘数、被乘数、除数与被除数。这种计算器并不是加法器，它不仅能计算加法、减法，也能计算乘法和除法。乘除法是配合乘法口诀实现的，其原理与珠算的乘除法一致。可以由高位起算，也可以由低位起算。如果结合着平方表、立方表，也可以进行较复杂的运算。

盘式计算器的运算举例。今以乘法为例，说明盘式计算器由高位起算的使用方法。

计算两数的乘积：965×67。

先将两个位盘上的读数拨成零，再将被乘数 965、乘数 67 分别置于上、下两行扇形孔中(如图 4.1.5)。

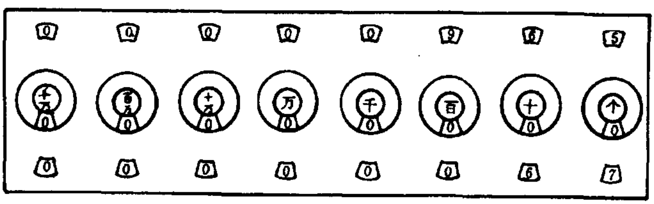


图 4.1.5　乘法运算 965×67

以乘数第一位数码 6(实际是 60)乘被乘数第一位数码 9(实际是 900)，得数为两位数 54(实际是 54 000)。因乘数是两位数，应将 54 置于被乘数第一位数前一个位盘即千位盘上。

以乘数 6 乘被乘数第二位数码 6，得两位数 36，将 36 置于被乘数第二位数前一个位盘即百位盘上。也就是在千位盘上拨动 3 格，因原有数码 4，拨 3 格后则千位盘上变为 7。在百位盘上则为

6。

以乘数 6 乘被乘数第三位数码 5，得数为 30，将 30 置于被乘数第三位数码前一个位盘上，也即十位盘上(图 4.1.6)。

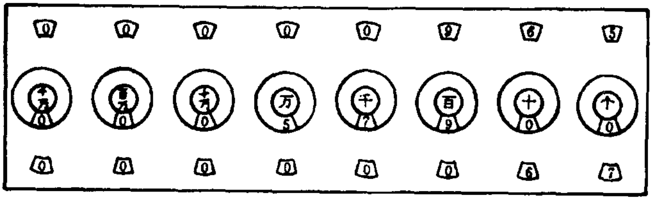


图 4.1.6　乘法运算

仿上法，以乘数第二位数码 7 乘被乘数各位数码 9，6，5，得 63，42，35。将 63，42，35 分别置于被乘数码的前一个位盘上，并累加在前一得数上(图 4.1.7)，即是得数 64 655。

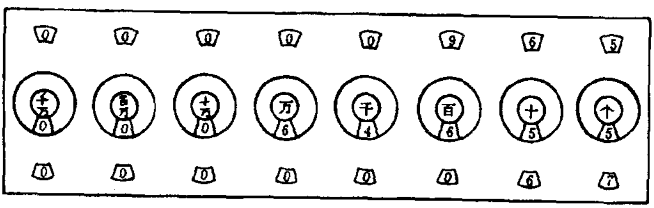


图 4.1.7　乘法运算

这是用盘式计算器计算两数乘积的情形，至于做加、减、除法运算，大致与此相似。

2. 筹式计算器

筹式计算器有 4 台。根据大小可分三种型号：第一种长 60 厘米，宽 12.4 厘米，高 4.5 厘米；第二种长 58 厘米，宽 12.5 厘米，高 4.5 厘米；第三种长 17 厘米，宽 9 厘米，高 5 厘米(如图 4.1.8)。它们的内部结构和原理基本上差不多，都是通过中国竖式纳披尔筹进行计算的。现以第三种型号为例，加以说明。

在这种计算器里，有上、下排列的 10 对铜轴，每轴的一端有

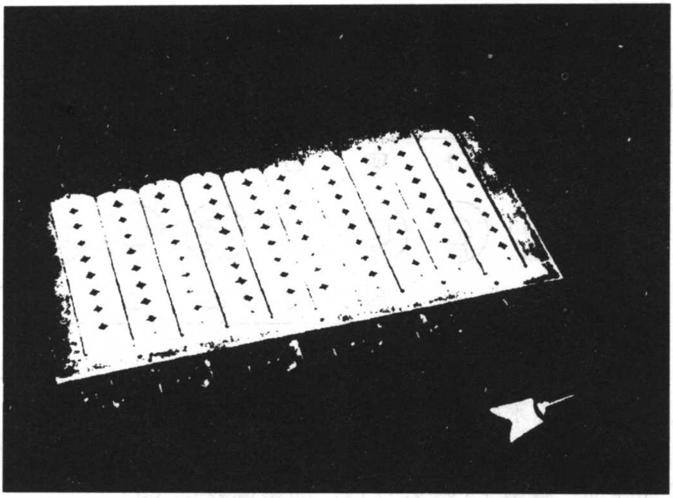


图 4.1.8

一个 6 个齿的齿轮。上下两轴的齿轮之间有个中间齿轮(如图 4.1.9)。由于中间齿轮的作用，当转动一个铜轴时，与它成对的另一个铜轴就按相同方向转动。每对铜轴由一张纸做的中国竖式纳披尔筹相连结。这种计算器共有 10 张纸筹，即它可表示 10 位数。当用一把钥匙转动一个铜轴时，便将纸筹卷起，而另一轴便将纸筹放开，从而使得纸筹在计算器上面左右移动。

盘式计算器的拔针和筹式计算器的钥匙都起着摇柄的作用，稍加改变即可安装成摇柄，和西方的手摇计算器就没有什么区别了。

盘式计算器除能进行加、减、乘、除四则运算外，结合着算表还能进行平方、立方、开平方及开立方的计算。筹式计算器因其使用纳披尔筹，所以，不仅能做乘除法，而且也能进行平方、立方、开平方和开立方运算。

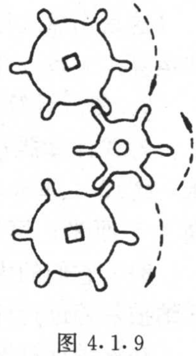


图 4.1.9

3. 欧洲计算器与中国计算器

欧洲早期的计算器都是用圆盘和圆柱造成的，也有筹式计算器。但是，北京故宫博物院所藏计算器可能是中国自己制造的。中国的盘式计算器从原理上看与巴斯加计算器比较相近，在许多地方又优于巴斯加计算器，扩大了适用的范围。我们在中外文献上没有找到巴斯加计算器传到中国的记载，不过这还不能断言对中国没有影响。在巴斯加发明计算器之后，如前所述，法皇路易十四于1685年对中国采取积极的传教方针，派遣了一批有学问的传教士如洪若翰等来到中国，受到康熙皇帝的欢迎，并召他们进宫讲授西方科学①。这些传教士很可能知道巴斯加计算器，在讲授科学的过程中也可能把计算器的构造情况介绍给康熙皇帝，然后由清宫设计制造。如果这个推测成立的话，中国盘式计算器的制造时代应是在这批传教士于1687年到达北京之后。

关于中国盘式计算器是否受到莱布尼兹的影响问题，虽然当时莱布尼兹和中国确有关系，但是很难看出中国盘式计算器与莱布尼兹计算器有什么关系。

筹式计算器的出现关键在于纳披尔筹，这种筹是英国数学家纳披尔把中世纪流行的阿拉伯格子算法加以改进，于1617年发明的一种算筹。很快就在欧洲流传起来，并于1628年传入我国，受到欢迎。这时的算筹都是竖式斜格。故宫博物院现藏多副这种筹，图4.1.10为其中之一。

筹式计算器的纳披尔筹则很特殊，系兼采以上两种形式构成的：竖式直行半圆格，很显然是受到梅文鼎的影响。因此，筹式计算器的出现自然是在1678年以后，而且是中国所独创。

根据以上讨论，两种计算器在中国制造的时间上限仅相差10年，似是筹式的早于盘式的。但是，我们认为真正制造的时间，两

① 李俨. 中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955

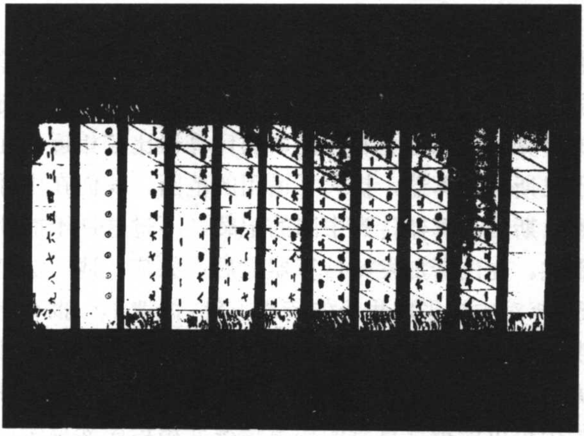


图 4.1.10

者应正好相反。这是由于可能受法国传教士的介绍先制造了盘式计算器，因而人们联想到筹式计算器。至于时间的下限，当不会晚于康熙末年(1722 年)。因为以后的雍正、乾隆等皇帝都不像康熙皇帝那样关心数学研究。即两种计算器制造的时间为 1687～1722 年的 30 多年间。

这批计算器，不仅是中国数学史上的珍品，而且也是世界数学史上瑰宝。中国是世界上较早制造手摇计算器的国家之一，但是由于把它们锁在深宫，外间无人知晓，后来也就没有发展。到清末时，中国从国外进口几台键盘式手摇计算器，人们感到非常新奇①，殊不知清宫里早已有之。

## 二、故宫博物院所藏其他数学文物

我国明、清两代的 500 多年里，在故宫所遗留的科技文物非常丰富而且极其珍贵。据初步统计，故宫所藏文物竟有 90 万件②，

---

① 算器图说. 见：格致汇编. 1876，1(1)

② 华慎. 从故宫到博物院. 紫禁城，1980(1)

其中科技文物有几千件，都是罕见的旷世瑰宝。

由于康熙帝和乾隆帝比较重视科学技术，当时并进行了大量的科学实验研究工作，因而遗留下来大批科学仪器和有关文物。在当时来说，这批科技文物数量之多，种类之齐全，为举世所罕见。从时代上说，这批科技文物绝大部分是康熙、乾隆年间的，也有小部分年代较早的和较晚的。就产地而论，一部分是来自欧洲，有的是贡品，有的是购置品；也有一部分是在明、清时期，我国自己设计、制造的。

1. 各种尺规

《数理精蕴》中记载了我国使用对数计算尺，有四种尺度：假数尺(对数尺)、正弦假数尺、切线假数尺、割线假数尺。对数计算尺为英国人甘特发明于17世纪20年代。故宫博物院有铜制、象牙制许多计算尺，有的还标有“康熙御制”字样。显然是我国仿甘特计算尺制造而成。伽利略比例规传入我国后，在康熙年间也有发展。故宫珍藏许多铜、银及象牙制比例规，比例线条或三五种，或十余种。故宫中还有铜、银制量角器。有些比例规和量角器也刻有“康熙御制”字样。

假数尺。故宫收藏假数尺较多。一般是两尺作为一套，一尺正、反面都是假数尺，另一尺正、反面分别是正弦尺、正切尺。也有的两正面都是假数尺，其反面分别是正弦尺与正切尺。中算史专家李俨认为刻有“康熙御制”的假数尺是1680年前后我国制造的[①]。

分厘尺。故宫珍藏多具分厘尺，有的是黄铜制，有的是象牙制，也有的是用玉石制成的。这些尺都精确到尺长的$\frac{1}{1\,000}$。

角尺。角尺有铜制的，也有银制的，还有牙制的，有的可精

① 李俨．计算尺发展史．上海：上海科学技术出版社，1962

确到6分，有的可精确到3分。每一角尺上都有“康熙御制”字样，可称为“康熙角尺”。

矩尺。故宫所藏的矩尺只有三支，都是铜制品。其中两支的形状一样，巴黎制造，另一支是我国自制。使用时两臂可以张开，以测定直角，不用时两臂可叠合在一起。

比例规。比例规大部分为黄铜制品，也有不少牙制品。有的刻有一种比例线，有的则刻有10种比例线①。制作都非常精美。

2. 纳披尔算筹

在第一部分中已经介绍了纳披尔算筹。这里只补充一两点。纳披尔算筹原来只有从一到九的九个筹，而没有零筹和平方筹及立方筹，运算中颇有不便。纳披尔算筹原为竖排，计算时，则需横写算草，而横写算草又不适合我国当时的习惯。纳披尔算筹与阿拉伯格子算法一样，都便用斜格，而斜格易于产生误会，且不醒目。方中通在《数度衍》中给纳披尔算筹增加了零筹、平方筹及立方筹。梅文鼎在《算筹》中，把纳披尔算筹的斜格改为半圆格或直格，把竖排改为横排。这样，既可避免由斜格产生的误会，又可适应我国当时竖写算草的习惯，同时结合平方筹也可进行乘方、开方运算。

故宫藏有多种算筹，有铜制品、牙制品、虬角制品、木制品；有横排的，也有竖排的；有斜格的，也有半圆格或直格的；有阿拉伯数码的，也有用汉字的。种类十分齐全，确实是我国珍贵的数学文物。

3. 立体几何模型

立体几何模型共有70多件，都是楠木精制。有各种正多面体、半正多面体、柱、锥、台、球、半球、球扇形、开立方模型、分解正方棱台模型等。这些模型与《数理精蕴》里所载的有关图形

① 严敦杰. 故宫所藏清代计算仪器. 文物，1962(3)：19～22

颇为类似。因此，这些立体几何模型可能是当时蒙养斋编汇官梅珏成等人编译该书时制作的。

4. 数学用表

故宫藏有数十部数学用表，这些表并不是作为图书收藏的，而是作为数学文物与计算工具一起珍藏起来的。这些表有的是工笔精妙，有的是两色木版套印，有拉丁文的表，也有汉字的表，装帧都很精美[①]。

## 第二节　陈厚耀与《陈厚耀算书》

陈厚耀(1648～1722)，字泗源，号曙峰，江苏泰州人。康熙丙戌(1706年)进士。因通晓历法，李光地把他推荐给康熙皇帝。召见后，试以数学问题，均能答对。康熙四十七年(1708年)，受命来京。经常与康熙帝讨论数学问题，学问大为长进。陈厚耀请定步算诸书，以惠天下。康熙对陈厚耀的学问非常赏识，尝召入至渊鉴斋，反复询问，又召至西暖阁，询问家世甚详。康熙四十八年(1709年)五月，随康熙至热河，途中康熙向陈厚耀提出了许多历算问题，共同讨论。传旨说："上道汝学问好，授汝京官，使汝老母喜也。"授中书科中书，并赐以《算法原本》、《算法纂要》、《同文算指》、《嘉量算经》、《几何原本》等书。1713年修书成，特授翰林院编修。1713年后，又与梅珏成等编纂天文算法书。康熙六十年(1721年)完成《历象考成》42卷，《律吕正义》5卷，《数理精蕴》53卷，合称《律历渊源》100卷，雍正元年(1723年)出版。陈厚耀因母亲年事已高回苏州任教职。1714年遭母丧，康熙帑银，着江南织造经纪其丧。丧毕，晋升为国子监司业，擢左论

① 李迪，白尚恕．故宫博物院所藏科技文物概述，中国科技史料，1981 (1)：95～100

德兼翰林院修撰。1718 年会试，充同考官，1719 年因病告退，仍留原职。著作有《春秋长历》10 卷、《续增新法比例》40 卷、《勾股图解》2 册。尚有《借根方算法》8 卷、《算法纂要》1 卷、《八表根》1 卷、《几何原本》6 卷、《江南通志》、《扬州府志》、《泰州志》均作陈厚耀撰，李俨疑非是[①]。康熙六十一年(1722 年)卒，享年 75 岁。

陈厚耀所著历算著作甚多，但多不传或不全，如《续增新法比例》，即残缺不全。他的手稿本《算义探奥》是海内孤本，现藏中国科学院自然科学史研究所。本书所要介绍的《陈厚耀算书》共 6 册 1 函，为李俨《近代中算著述记》所未录，是李培业的个人藏书。

《陈厚耀算书》共 6 册，是抄本，其中《勾股图解》2 册，《算法原本》1 册，《直线体》1 册，《堆垛》1 册，《借根方比例》1 册。全书未题总名，因《勾股图解》目录前有“翰林院编修臣陈厚耀”数字，故定名为《陈厚耀算书》[②]。

现对各书作简短介绍。

## 一、《勾股图解》

《勾股图解》明记为陈厚耀所撰，其写作年代不详。经李培业考证，此书的写作应该是在开始编写《数理精蕴》之前，即 1713 年前[③]。《勾股图解》是流传在世完整的陈厚耀著作之一。

此书卷首有一篇“钦授积求勾股法”，单独成篇，不在《勾股图解》之内。“钦授”说明是康熙帝传给陈厚耀的，康熙帝的数学著作不多见，此篇可视为康熙帝著作[④]。

---

① 李俨. 近代中算著述记. 见：中算史论丛(第二集). 北京：科学出版社，1954

②③ 李培业.《陈厚耀算书》研究. 见：数学史研究文集(第三辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1992. 72～77

④ 李培业. 论康熙数学数著作《积求勾股法》. 见：数学史研究文集（四）. 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993. 47～49

《勾股图解》分两大部：一是“以两数求勾股”，相当于《数理精蕴》中的“勾股弦和较相求法”；一是“以积求勾股”，相当于《数理精蕴》中的“勾股积与勾股弦和较相求法”。

1．以两数求勾股

设直角三角形三边为$a$，$b$，$c$。杨辉提出勾股和较13事[①]，已知2事，就可以解此直角三角形。《数理精蕴》中解决了60问。并云：“旧算书所有者八，按旧法可以变通者三十有四，旧法所无，今创立者一十有八。”这18种新创立者有8种已于《勾股图解》中得到解决。所以说，《勾股图解》的成就，在《数理精蕴》中得到了反映。

《勾股图解》虽与《数理精蕴》中“勾股弦和较相求法”解决的是同一类型问题，但也有自己的特色。《勾股图解》继承了我国传统的勾股术，多次引证我国古算书。而《数理精蕴》中则受《几何原本》的影响较大。

2．以积求勾股

这类问题是已知勾股形的面积，另知13事中的1事，以解勾股形。共有13个问题，但《勾股图解》中只解决了9个问题。

《数理精蕴》在“勾股积与勾股弦和较相求法”一节中，解决了9个问题，恰为《勾股图解》内所解之问题。而《数理精蕴》下编卷二十四有“附勾股法四条”恰是《勾股图解》内有题无解的4个问题。因其解法用到开带从立方，《数理精蕴》把它移至后面。

《勾股图解》开头小引曰：

“有积即可求勾股，为前六归开方之术是也（即指‘钦授积求勾股法’）。然此惟正勾股可用，即勾三股四弦五之率耳。至于变勾股之生率不一，必须有积有弦（或有勾或有股），然后可推。今略举数条，并释其义。”

① 见本大系第五卷和第六卷有关章节。

其中解法多利用“弦图”。有的是陈厚耀自己的创作。例如，“有勾股积有弦，以求勾求股”条，陈厚耀说：“此法检《算法统宗》、《数度衍》、《勾股义》、《同文算指》并缺。今拟一法于此。”解法是：“四因积，以弦自乘，两数相减，余数开方为勾股较。又倍积，以勾股较为带纵，开方除之，得勾。”其图如 4.1.11，其解曰：

“弦自乘之内，有勾股积者四(即两直方形积)，而多一较自乘积。今四周勾股积，以减弦自乘，则其所余者，必较自乘之积也。故平方开之，得较。既得较矣，则合两勾股积以为直方形，而以较为带纵，开之，则得勾矣。”

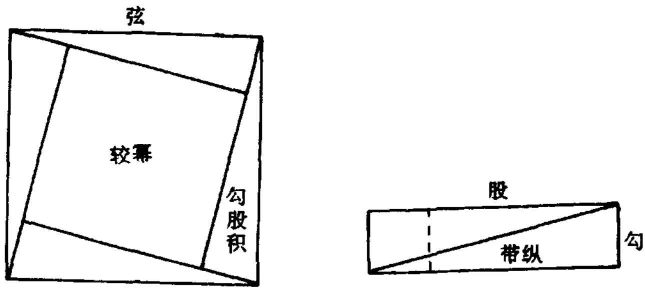



图 4.1.11

《数理精蕴》中解法与此相同，可见，这部分内容有可能是陈厚耀所增补。

## 二、《直线体》、《堆垛》、《借根方比例》

此三册与《数理精蕴》中相应部分完全相同，但未写《数理精蕴》书名，单独成书。估计它的成书年代应在 1713 年以后。

陈厚耀精研算理，梅珏成在《增删算法统宗》中多次引用陈厚耀论说。在求平地堆米、倚壁堆米的体积时，梅珏成引证陈厚耀学说，并言：“泗源先生，泰州宫论，讳厚耀，于此学甚深，往往别寻蹊径，存此认见一斑。”由此可知，陈厚耀于求积问题，多有深究，故《直线体》、《堆垛》等论述求积问题的书，应是陈厚

耀所写。

《借根方比例》系当时传入的代数学。陈厚耀在1708年进京，比梅珏成早见康熙帝，故先授给其借根方是可能的。《江南通志》记载《借根方算法》8卷系陈厚耀所撰，不是没有缘由的。所以《数理精蕴》中的"借根方比例"部分出于陈厚耀的手笔也顺理成章。

**三、《积求勾股法》**

《陈厚耀算书》中，有一篇《积求勾股法》，因在篇名前加"钦授"二字，故可视为现存的康熙帝第二部数学著作。《钦授积求勾股法》，单独成篇，装订在陈厚耀《勾股图解》之前，共12页，每页11行，每行25字，应是原稿誉正本。成书年代应是1713年前。

全书所解决的中心问题是求解正勾股形，即与"勾三、股四、弦五"勾股形成比例的整勾股形问题。内容分三部分。

1. 定率表

勾　3　股4　弦　5　积6

勾股和7　勾弦和8

股弦和9　弦和和12

勾股较1　勾弦较2

股弦较1　弦和较2

弦较和6　弦较较4

容圆径2

勾实　9　股实　16　弦实25

2. 用法

(1)"以今所设之数为实，取定率内与所设数同名之率为法，法除实得数，以勾率乘之得勾，以股率乘之得股，以弦率乘之得弦。"

(2)"若所设者为积数，以积率六除之，平方开之，得数。再以勾、股、弦各率乘之，即得勾、股、弦之数。"

3. 问题及解答

共有 23 题。例如，

“勾股较二尺，求勾、股、弦。置勾股较二尺，以勾股较定率一除之，仍得二。乃以勾率乘之，得勾六尺；以股率四乘之，得股八尺；以弦率五乘之，得弦一十尺。”

其解法相当于

勾=(勾股较÷勾股较定率)×勾率，

股=(勾股较÷句股较定率)×股率，

弦=(勾股较÷勾股较定率)×弦率。

书中有一幅图形，把此类问题及其解法全部纳入其中。现将其改为现代形式。

设所求之正勾股形为$\triangle A_1B_1C_1$，各边长为$a_1$，$b_1$，$c_1$，$\triangle ABC$为勾三股四的正勾股形，其边长为$a=3$，$b=4$，$c=5$，由图 4.1.12 中可知，若$b_1=nb$，则

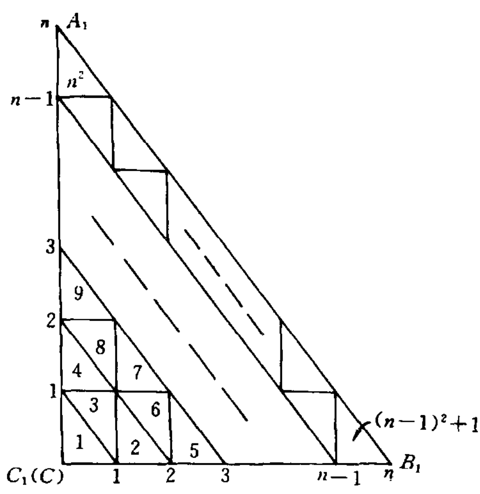



图 4.1.12

$$\triangle A_1B_1C_1=n^2\triangle ABC，\ n=\sqrt{n^2}=\sqrt{\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC}}，$$

所以　$b_1=nb=b\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle ABC}}=4\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{6}}$。

同理，$a_1=3\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{6}}$，　$c_1=5\sqrt{\dfrac{\triangle A_1B_1C_1}{6}}$。

这里直接用了面积证法，尚保留了中算特色。而《数理精蕴》则受西方数学影响较大，所以与上述两本书对同类问题的解决方法迥然不同。上面就是“用法”(2)所说的内容。内容虽然不深，但是却反映着很高的抽象思想：把一条几何定理的情形全部由一个图形表达出来。

综上所述，我们可以得出如下结论：

第一，《陈厚耀算书》中各书，或者为其所撰，或者为康熙帝所赐。

第二，《陈厚耀算书》中各书，均为《数理精蕴》所采纳。有的改编，有的全录，这说明陈厚耀参加了《数理精蕴》的编写工作，《陈厚耀算书》就是他编写材料的一部分。

第三，《钦授积求勾股法》，可能是由康熙帝口述，陈厚耀加工整理而成，因此有“钦授”二字。

## 第三节　梅瑴成的数学工作

梅瑴成是康熙晚期至乾隆前期最著名的数学家和天文学家之一。作为朝廷中的官方科学家，他是当时几个大型科研项目的主要实施者。他和陈厚耀、何国宗、顾琮及明安图等科学家是当时朝廷里主要的天文历算专家。在清代天算史上占有重要地位。

梅瑴成(1681～1763)，字玉汝，号循斋，又号柳下居士，是梅氏家学的重要传人。瑴成的父亲梅以燕对天算也有一定了解，他

的几位伯祖父也都熟悉天算，各有著述。在这样的家庭背景下，梅瑴成自幼得到薰陶，对天算极有兴趣。又加上祖父梅文鼎的悉心教育培养①，使他在很早时便能理解历算中的内容，有时还能有自己的见解。例如，梅文鼎在研究"日差"时曾得出一个错误的结论，后因"瑴成窃窃然疑之"，促使他重新考虑，纠正了错误。通过这件事，梅文鼎对瑴成的数学和历法感悟能力颇为自豪②。后来梅瑴成又跟随祖父到各地访问，陪他讲学，结识了不少天算家，增加了自己的学识。这样，他便能帮助祖父在研究中做一些辅助工作了③。例如，《诸方节气加时日轨高度表》1卷，就是在祖父指导下由瑴成写成的④。梅文鼎的《平立定三差详说》是在他研究清楚后"命孙瑴成衍为垛积之图"，定稿成书⑤。《堑堵测量》中的几何图形也有一些是由瑴成手绘的⑥。李光地在上谷刊刻梅氏著作时，梅瑴成也"事校仇之役"⑦。

梅瑴成20岁时曾陪祖父到苏州访问，在那里停留了10日，见了杨定三和杨作枚祖孙，及陈厚耀和秦二南等人，与他们切磋讨论。陈厚耀原是梅文鼎的学生，经李光地推荐，康熙特命他进京从事研究。陈厚耀对年轻的梅瑴成特别赏识，在康熙面前赞扬他

---

① 为了培养瑴成及其弟轩成，梅文鼎曾编有专门的数学教材，供他们学习用。

② 梅文鼎在《勿庵历算书目》"日差原理"条记述了这件事，并引汉代杨雄与其子童乌讲论《太玄》的故事来赞扬瑴成的聪慧。他写道："至理人人可知，而执成见者昧之。'童乌九岁能与太玄'，于兹益信。"此事被采入《畴人传》、《清史稿》及杭世骏所写的《梅文鼎传》中。

③ 李迪，郭世荣. 清初著名天文数学家梅文鼎. 上海：上海科技文献出版社，1988. 208

④ 梅文鼎. 日差原理. 见：勿庵历算书目

⑤ 梅文鼎.《平立定三差详说》序

⑥ 梅文鼎. 堑堵测量. 见：勿庵历算书目

⑦ 李光地.《历象本要》序

"学甚深"。于是梅珏成于1712年被召进宫到蒙养斋学习研究历算[①]。次年他被赐予举人，1715年又被赐于进士出身，官至翰林院编修、顺天府丞、鸿胪寺卿、都察院左都御史。

蒙养斋实际上是康熙帝办的历算研究机构，既有研究任务，又培养人才。因此，阮元称梅珏成"肄业蒙养斋"[②]，梅氏本人也多次自称为康熙帝的学生。梅珏成在蒙养斋期间，一方面进行天文学和数学学习，另一方面参加编书工作，成为当时重要的科学家。

祖父梅文鼎的关系、康熙帝的器重以及他本人的学术成就等方面的因素，使他为梅氏家族赢得了很高的荣誉，雍正、乾隆时曾追封他的祖父母和父母荣誉称号[③]。

梅珏成是当时朝廷里几个重大科研项目的主要实施者。首次是他和陈厚耀共同受命编写"步算"书籍。这个项目是陈氏向康熙帝提出的，得到了批准。同时康熙帝还命把梅珏成调来，参加该项目的研究。这就是梅珏成进京的背景。1712年由陈厚耀主持的上述项目很快便完成了，但可能因不符合康熙帝的预先设想而被废置不用。康熙帝的打算是编写一套大型著作，全面反映由西洋传入的天文历法和数学知识，并体现中国人的研究成果。于是于1713年命何国宗和梅珏成任总裁，重新编写一套书。这个项目至1722年告成，成果是三部书，即《律吕正义》、《数理精蕴》和《历象考成》，合称《律历渊源》（详细情况，请见本书第三编第一章）。梅珏成在编写过程中发挥了重要的作用，特别是书中也体现了梅文鼎的研究成果。

---

① 阮元. 陈厚耀. 见：畴人传. 卷四十一

② 阮元. 畴人传. 卷三十九

③ 李迪，郭世荣. 清初著名天文数学家梅文鼎. 上海：上海科技文献出版社，1988. 45

梅珏成领导下完成的另一个大型项目是编写《历象考成后编》。雍正年间，钦天监用第谷法推算交食出现了偏差，西洋人戴进贤修改了算法，预报交食较前为准。于是雍正帝命戴进贤编写了新的日躔月离表，但是没有说明和推算方法。乾隆二年(1737年)，依顾琮的推荐，皇帝命梅珏成任总裁，何国宗任副总裁，编写说明书。此项任务于1742年完成，其成果就是《历象考成后编》。这是一部由中国人和传教士共同完成的著作，书中最突出之处是编入了刻普勒第一和第二定律以及属于哥白尼体系的一些计算方法[①]。就数学知识而言，《历象考成后编》中关于椭圆的知识和椭圆轨道运动的计算方法[②③]，在清代数学史上具有重要意义。

梅珏成自著的书主要有《赤水遗珍》1卷和《操缦卮言》1卷。这两部书都是作为《梅氏丛书辑要》的附录出版的。

《赤水遗珍》由一些短篇文章组成，记录了梅珏成个人在数学和天文学方面的几项工作以及“杜氏三术”。现将其中重要者介绍如下。

1. “天元一即借根方解”

宋元时代的天元一术在明代已经失传。虽然明代中期唐顺之和顾应祥都见过李冶的《测圆海镜》，但是二人均不讳言他们对天元术无从下手、完全不理解。王文素、吴敬和程大位在他们的书中虽都用“天元”这样的词汇，但他们不知天元为何物。清康熙

① 这些知识曾在康熙末年传入中国，但没有被编入《历象考成》。见：Keizo Hashimoto(桥本敬造)，Catherine Jami(詹嘉玲). Kepler's Laws in China：A Missing Link? Jean－François Foucguet's Lifa Wenda(历法问答). Historia Scientiarum，1997(6)：3

② 薄树人. 清代对刻普勒方程的研究. 见：中国天文学史文集(第三辑). 北京：科学出版社，1984

③ 朱亚华. 明末清初椭圆知识的传入及应用. 见：数学史研究文集(第一辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1990. 104～116

年间传教士把西方代数方法传给了康熙帝，译名为借根方比例。康熙帝还知道“代数学”一词之音译“阿尔热巴达”，译言东来法也。康熙帝又把借根方比例法教给了他身边的人。《数理精蕴》设专章介绍此法。梅珏成自称从康熙帝那里学会了借根方法。后来他悟出借根方与天元一是同一回事。他写道：

“尝读《授时历草》，求弦矢之法，先立天元一为矢。而元学士李冶所著《测圆海镜》亦用天元一立算。传写鲁鱼，算式讹舛，殊不易读……而无以解也。后供俸内廷，蒙圣祖仁皇帝授以借根方法，且谕曰：西洋人名此书为阿尔热八达，译言东来法也。敬受而读之。其法神妙，诚算法之指南。而窃疑天元一之术颇与相似。复取《授时历草》观之，乃涣如冰释。殆名异实同，非徒曰似之已也。”[①]

梅珏成借助借根方法正确解读了《授时历》原文，对每一步都作了说明，进而校正了原文中的一些传写错误。他还选择了《测圆海镜》、《四元玉鉴》等书中的几个题目作了解释，以说明天元术。

梅珏成对天元术的解读基本上正确。天元术自元末以来长久失传，无人能解，梅珏成读懂了它，这在当时无疑是一个重要的贡献，因而得到很高的评价，如阮元认为梅珏成“使洞渊遗法有明三百年来所不能知者，一旦复显于世，其功算学为甚巨矣”[②]。梅珏成自己也颇为得意。同时他又为“西学中原”找到了一个重要的“证据”，对此他同样十分得意：

“夫元时学士著书，台官治历，莫非此物[③]，不知何故遂失其传。犹幸远人慕化，复得故物。东来之名，彼尚不能忘所自。而

① 梅珏成. 天元一即借根方解. 见：赤水遗珍

② 阮元. 梅珏成. 见：畴人传. 卷三十九

③ 指天元术。

明人独视为赘疣而欲弃之。噫！好学深思如唐(顺之)、顾(应祥)二公，犹不能知其意，而浅见寡闻者，又何足道哉？何足道哉?!”[①]

2.“有勾股积、有股弦和，求诸数”

这是一个“积求勾股”的问题。记勾股积为$A=\frac{1}{2}ab$，勾为$a$，股为$b$，弦为$c$，则有四个相关的问题：

已知$A$，$c+b$，求$a$，$b$，$c$；

已知$A$，$c-b$，求$a$，$b$，$c$；

已知$A$，$c+a$，求$a$，$b$，$c$；

已知$A$，$c-a$，求$a$，$b$，$c$。

此四题是18世纪初困扰清廷数学家的难题。陈厚耀在他的《勾股图解》中记有上四题，但没有解答，说明他尚不知如何求解[②]。又，1713年何国柱到朝鲜和当地数学家论算，他不能解答的题目中就有上述四题中的两题[③]。梅珏成在编《数理精蕴》时“苦思力索”，方知可用带纵立方法解此问题，于是在《数理精蕴》下编卷二十四讲述完带纵立方后“附勾股法四条”，解决了上述四题。其解法是：

因为　$ab=2A$，所以有　$a^2b^2=(2A)^2$。

又因为　$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$，

而　$c-b=2\left(\frac{c+b}{2}-b\right)$，

于是　$b^2\left(\frac{c+b}{2}-b\right)=\frac{(2A)^2}{2(c+b)}$。

这表明已知勾股积$A$，股弦和$c+b$，求$b$可转化为开带纵立方问

① 梅珏成．天元一即借根方解．见：赤水遗珍

② 李培业．陈厚耀算书研究．见：数学史研究文集(第三辑)．呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1992，72～77

③ [朝鲜] 洪正夏．九一集．见：前引李培业文

题：以$\frac{(2A)^2}{2(c+b)}$为长方体积，$\frac{c+b}{2}$为扁立方体高与长之和，亦即高与阔之和，用带两纵相同和数开立方法解

$$x^2\left(\frac{c+b}{2}-x\right)=\frac{(2A)^2}{2(c+b)}, \qquad ①$$

得$x$为长方体高，即勾股形之股$b$。其他三题用同样的方法可得[①]。但是，上述方程应有不止一根，梅瑴成没有发现这一点。后来，汪莱找到了其他根[②]。

《赤水遗珍》所记方法与前述解法大同小异，它实际上是梅瑴成的学生丁维烈的解法。梅瑴成觉得他编《数理精蕴》时给出的①式不易求解，让丁氏进一步研究。丁维烈给出的开方式为：

$$y^2\ [(c+b)-2y]\ (c+b)=(2A)^2。 \qquad ②$$

在代数上①与②没有区别，但其几何意义却大不相同。后者可以看成是$(c+b)$个以$b^2$为底、$c-b$为高的扁立方体合成的大立方体，其积为$(2A)^2$。梅瑴成认为②比①更易求解。

像①式那样的解法在王孝通《缉古算经》中已经出现，但清初的算家无由得知，还以为是创见。

3. 杜氏三术

《赤水遗珍》记述了法国传教士杜德美(P. Jartoux，1668～1720)讲述的三个级数公式，后人称为"杜氏三术"：

(1)　$\pi d=d\left(3+\frac{3\cdot 1^2}{3!\ 4}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{5!\ 4^2}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!\ 4^3}+\cdots\right)$

(2)　$r\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3!\ r^2}+\frac{a^5}{5!\ r^4}-\frac{a^7}{7!\ r^6}+\cdots$

(3)　$r\ \mathrm{vers}\ \alpha=\frac{a^2}{2!\ r}-\frac{a^4}{4!\ r^3}+\frac{a^6}{6!\ r^5}-\frac{a^8}{8!\ r^7}+\cdots$

---

① 见《数理精蕴》下编卷二四。

② 汪莱. 衡斋算学(第二册). 参阅：李兆华.《衡斋算学》第二册研究. 见：数学史研究文集(第三辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1992，78～82

其中，$\pi$ 为圆周率，$d$ 为圆直径，$r$ 为圆半径，$a$ 为弧背，即圆弧长，$\alpha$ 为弧背 $a$ 所对的圆心角。清代的算家称这三个公式为“杜氏三术”，实际上它们只是由杜德美传授给清初的宫廷数学家的，而其原创者为牛顿((1)式，1676 年）和格利高里，(2)式和(3)式，1667 年)[①]。这三式在清代级数论发展史上有重要意义，是明安图《割圆密率捷法》一书的起点。

4. 证明三角公式

《赤水遗珍》中证明了平面三角形的正切定理和球面三角形的半角正弦定理：

$$\frac{\tan\frac{\pi-B}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{c+b}{c-b},$$ 其中，$A$，$B$，$C$ 为角，$c$，$b$ 为边；

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\cdot\sin b}},$$ 其中，

$C$ 为角，$a$，$b$，$c$ 为边，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

梅文鼎曾证过正切定理，梅珏成给出了更为简洁的新证。半角正弦定理是用《环中黍尺》中的方法证明的。

梅珏成曾参与《明史》天文历志的审查工作，是清史时宪志和天文志的主笔。《操缦卮言》记录了他在这方面的工作，包括他的部分稿件和一些书信。这些稿件和书信充分说明了他的编史观及他的意见、建议和工作。在正史中要不要使用图形这个问题上他和其他审查者展开了论争。梅珏成坚决主张要用图。他的其他一些观点，如“月犯恒星为天行之常，无关休咎”，“五星犯月必无之事”，等等，也都十分重要。《操缦卮言》很少涉及数学问题，

---

① 李俨．明清算家的割圆术研究．见：中算史论丛(第三辑)．北京：科学出版社，1955．254～512

兹不详述。

梅瑴成晚年完成的两件大事是编定《梅氏丛书辑要》和《增删算法统宗》。

梅文鼎去世后，在魏荔彤主持下，由杨作枚整理编定《梅氏历算全书》，于1723年出版。但梅瑴成对杨作枚的编写工作并不满意，认为《历算全书》“校仇编次不善”，必须重加编写。经过多年准备，他在80岁高龄时最后编定《梅氏丛书辑要》。

杨作枚把梅氏的著作分为四类，按言理之书、言数之书、言历之书、言算之书的顺序编写。这种分类是把天文历法与数学看做一个整体，以天文历法著作为核心、数学为工具而安排在天文历法的前后。这种考虑符合“历算之学”的提法①。梅瑴成的编排则是把数学著作按照由浅入深的顺序排在前边，先算术，次代数，次三角，次几何，又次测量。然后再把天文历法著作依序排在后面，又把前述他自己的两部书作为附录列在最末。

梅瑴成认为杨作枚编定的《梅氏历算全书》中有四点不足：第一，把原稿中的几种书合在了一起；第二，有些书名被更改了，不是梅文鼎原来的书名；第三，杨作枚加入了自己的手笔；第四，有些内容作为单行本是必要的，但作为一套书就有重复的部分。他对上述问题做了处理，或恢复原貌，或删除，或分或合。应该说《梅氏丛书辑要》的编排和文字处理比《梅氏历算全书》有了很大的改善，梅瑴成在这方面贡献很大。但是他对杨作枚的贡献只字未提，有欠公允。事实上，杨作枚所见到的梅氏著作“稿略具而未成书者十之六”，他在整理时下了很大的功夫，功不可没。

梅瑴成在编写《梅氏丛书辑要》时，也加入了一些自己的观点，甚至对别人的批评。其中对江永的批评十分严厉。江永私淑

---

① 李迪，郭世荣. 清初著名天文数学家梅文鼎. 上海：上海科技文献出版社，1988. 49～50

梅文鼎，但在对天体运行体系的理解方面与梅文鼎有不同之处，因而在天体运动的计算上也有不同之处。江永写了《翼梅》（又称《数学》）8 卷，主要讲述自己的观点，批评梅文鼎之不足。他自以为梅珏成会理解他的苦衷，请梅珏成对他的著作提意见，并写序。不料，梅珏成不但不给写序，而且对江永痛加斥责，说他于历理上“泥于西说，固执而不能变”，其弊犹小，更为甚者：

“至其于西说之不善者，必委曲为之辞以伸其说，于古人创始之功，则尽忘之。而且吹毛求瘢，尽心力以肆其诋毁。诚不知其何心？夫西人不过借术以行其教，今其术已用矣，其学已行矣。慎修[①] 虽欲谄而附之，不已后乎！彼西人方谓古人全不知历，以自诩其功。而吾徒幸生古人之后，不能为之表扬，而且入室操戈，复授敌于柄而助之攻。何其悖也！”[②]

在梅珏成看来，江永发扬西说，攻毁传统古历，授敌于把柄，居心叵测。这是不适当的做法。

清初，《算法统宗》颇为流行，因当时古算书流传甚少，梅珏成对它十分重视，曾和陈厚耀等人讨论过书中的题目。他退休之后，对书中的内容做了增删和修订，并动员几个儿子参加缮写和校对工作，在 80 岁时最终完成《增删算法统宗》。这是一本十分流行的书，为《算法统宗》的流传做出了重要贡献[③]。

梅珏成对《算法统宗》的增、删、精简、校正、修改是多方面的。

在删节、精简方面，梅珏成删除了卷首的河图洛书、九宫八卦等内容，他认为“图、书之大用在画卦、叙畴”，不应属于“发

---

① 江永，号慎修。

② 《五星管见》梅珏成后识语. 见：梅氏丛书辑要

③ 严敦杰.《新编直指算法统宗》的流传. 见：算法统宗校释・代序. 梅荣照，李兆华校释. 合肥：安徽教育出版社，1990

明九章”之书。他又删除了最后的“杂法”，因为这些内容“无关大用”，有兴趣者可参考程大位原作。另外，书中的不少歌诀被删掉了，如“先贤格言”等没有重要“纯”数学内容的歌诀，有些有关算法的歌诀也被割掉了。还删了关于马杰算术的诗歌，等等。梅珏成精简了珠算运算口诀。

增加的内容很多。如有关珠算的减法口诀，有关西术三率法的论述。清初测定的“诸物轻重数”以及“钱粮四柱法”等也是新增的。新增的还有在《赤水遗珍》和《数理精蕴》中已有的“已知勾股积、勾弦和，求勾、股、弦”。此外，在个别题目下，还引述了梅文鼎和陈厚耀等人的说明。梅珏成把原书中的“算经源流”移至了书首，并做了增补，特别是增加了清初的书目。

梅珏成修正了原书中的算法错误。例如，原书均输章中有狐鹏共数问题如下：

“今有狐狸一头九尾，鹏鸟一尾九头，只云前有七十二头，后有八十八尾。问：二禽兽各若干?”

原解法曰：“置总头七十二，以减总尾八十八，余一十六，是二禽兽共数……”。梅珏成正确地指出：此“乃偶合耳，非通法也”。并给出了正确的解法。又如，原书“难题”衰分卷“铺金问积”题的解法中将面积单位和长度单位相混，梅珏成予以更正。

但是，由于不了解古算的内容，梅珏成也有将原本不误的算法说成是错误者。比如“难题”少广章中倒数第二题为计算堆垛的题目，程大位所用公式相当于沈括的隙积术，正确无误。梅珏成认为“此法大谬”，予以“改正”。又如商功章有“捆木”问题三个，其术文中用到了“加法”（即“随母留身增添”的定身加法），梅氏不解，反予“补正”。再如，难题盈不足章有“牧童偷瓜”题，原解正确，其原理相当于《九章算术》盈不足“又一术”。梅氏认为“此法非是”。

梅珏成对《算法统宗》最大的“增删”是对方程章的变动。他

指责原"方程一章，分款未清，法无画一，沿讹袭误"。于是依梅文鼎的《方程论》对该章进行了改写，摘录了《方程论》中的主要论述，而将"《统宗》本书之讹谬者，悉行削去"。实际上，梅文鼎对方程的论述未解古代"方程"的本来面目，不完善和错误之处不少。梅珏成不知古术，奉乃祖之作为圭臬，不仅将其编入《数理精蕴》，而且用于"改正"《算法统宗》。

另外，梅珏成在提到珠算时，认为《算法统宗》"算经源流"中所记《盘珠集》和《走盘集》是珠算书，后来持此论者既有中国学者，也有日本和欧洲的研究者。学者们对该两书各有见解，进行了长期论争，到目前为止，虽基本上趋向于认为它们为珠算书，但仍缺少直接证据。

前面提到的江永，是与梅珏成同时代的著名天算家，应略加讨论。

江永(1681～1762)，字慎修，安徽婺源人。著名经学家，专心于"十三经注疏"，一生在乡研读学术。曾去北京一次，当时正会诏举"明经行修之儒，有荐先生者，力辞免"。他著作颇多，除经学外，天算著作也不少，计有《推步法解》5 卷[①]，《翼梅》8 卷，续 1 卷，收入《四库全书》，改称《数学》，其内容为天文学和数学。《翼梅》的意思是在梅文鼎的羽翼之下。书中有关数学的有《方圆幂积比例补》、《正弧三角疏义》、《正弧三角会通》和《算賸》各 1 卷[②]。另有《河洛精蕴》9 卷，主要是用数学方法推阐河图洛书。这些著作都有传本。

---

① 经学・江慎修先生事略．见：国朝先正事略．卷三十四

② 《方圆幂积比例补》包括于《算賸》之内。

## 第四节　毛宗旦与屠文漪等对《九章算术》的探求

自从西方初等数学传入中国之后，人们开始对其进行研究，会通中西成为一种潮流，已如前述。但是，中国古代数学名著《九章算术》由于明代没有刊印，仅有极少的孤本和《永乐大典》所收者，研究者却长期没有见到，梅文鼎也未见全本。在此情况下有些数学家下很大功夫去探求《九章算术》的内容，其中以毛宗旦为代表，屠文漪也有类似工作。这种研究尽管有脱离主流的倾向，可也是一种尝试和努力，从而看到人们对民族遗产向往的热情。

以往我国数学通史著作很少提到这一工作，本书则补上此项缺环。

万历三十五年(1607 年)，对当时乃至此后一二个世纪的中国科学界来说是非同寻常的一年，因为一部伟大的著作——《几何原本》前 6 卷被介绍到了中国。这部书以其新颖的体例、严密的演绎体系令中国士大夫们耳目一新，使他们意识到在泱泱大国、朱明圣朝之外，还有另一种科学、文明。于是一部分开明的儒士以极诚恳极虚心的态度欢迎之。他们认为“能精此书者无一书不可精，好学此书者无一事不可学”[①]，并主张以此书为始，全面向西方学习。但与此同时，另一部分保守人士则采取相反的态度，尽力排斥、拒绝，“京师诸君子，即素所号通人者，无不望之反走，否则掩卷而不谈”[②]。这样连同由《崇祯历书》引起的中西历法之争，就在士大夫阶层开始展开了一场旷日持久的关于如何对待西

① 徐光启.《几何原本》杂议

② 李子金.《数学钥》序

学的论争。

在这场论争中，先后产生了“西学中源”、“会通中西”等观点。但不管这些论点的赞同者是为了论证西学源于中土，还是出于“会通中西”的目的，首先都得要了解自己古代的科学。这样，就促使人们对传统科学，特别是古代历算进行研究。

然而，古代的大部分数学名著包括《九章算术》在内此时却隐没不彰，少有的传本或深锁皇宫或秘藏于收藏家的书柜，人们易得到的仅《周髀算经》、《算法统宗》及《九章算法比类大全》而已。于是许多学者把整理、恢复传统古算作为己任。梅文鼎说：“俾古人之意晦而复昭，一线之传引而弗替，则生平之志愿可毕矣。”[①]他“凡遇古人旧法，虽片纸如拱璧焉”[②]。曾寻找《九章算术》全书，而未果。于是他撰《九数存古》，辑录古算；著《方程论》，阐发古代“方程”理论；作《少广拾遗》、《方田通法》，以究古代算法。

毛宗旦生活于康熙雍正年间，深受当时各种思潮的影响。对于西学，他持会通态度。在《九章蠡测》发凡中，他说：

“《同文算指》多刻西术，如三率、笔算等法，要之不离加减乘除，仍是中土旧术，故知中西无二算也。”“近有笔算、筹算、尺算办法，本之泰西，能精熟其法，用之亦敏妙，然法［与珠算］虽异而理实同。”

在梅文鼎的影响下，毛宗旦对传统古算着力访求，为恢复中算最古之典籍《九章算术》的原貌，他搜集当时所能见的算书，经数年覃思、厘定，成书一部。因“未多见古本，又苦思致浅隘，不能深入，凭臆之见，信笔诠解，正如以蠡测海，未知津涯”[③]，故

---

① 梅文鼎.《弧三角举要》序

② 梅文鼎. 九数存古. 见：勿庵历算书目

③ 毛宗旦.《九章蠡测》发凡

冠以书名《九章蠡测》。

《九章蠡测》，未刊，成书于康熙丙申(1716年)十月。现存抄本三部，缩微胶卷二部，抄本一藏于上海图书馆(简称上图本)，一藏于日本东京静嘉堂文库(简称静嘉堂本)，另一部是徐义保和郭世荣据李迪复制的上图本缩微胶卷的转抄本。该书自成书以来，人们仅知其名，其内容却鲜为人知。1949年，李俨(1892～1963)在上海图书馆的前身上海合众图书馆阅书时，偶然发现该书的抄本，即上图本。上图本的一些简单情况，严敦杰1950年在“近年来中算珍籍之发现”一文中作了扼要介绍①。至于它的内容，李迪在“《九章算术》研究史纲”一文中简单介绍过②。

《九章蠡测》10卷首1卷，清初钱塘(今杭州)毛宗旦著。毛宗旦，字辰再，生于康熙七年戊申(1668年)，仁和监生。清初河东转运使大兴(今北京市大兴县)薄有德序称：

“钱塘毛子辰再，博雅多通，自声韵偶俪之文，八体文书之字，靡不穿穴汇贯，尤精于算术……自乙亥岁(1695年)识之西涯汤先生③，座上定交十余年，其为人温良和易，不汲汲于荣辱得丧。”

除《九章蠡测》外，宗旦还著有《俟秋草》等，其故年在雍正六年(1728年)后④。

《九章蠡测》定稿时共分12册，经辗转易主，现存本已不全。上图本存9册，佚第2，4，5册；静嘉堂本存7册，仅知佚第1，2册。上图本书前附页有“叶景葵记”和“丰华老人自识”，简单

---

① 严敦杰. 近年来中算珍籍之发现. 科学通报，1950，2(7)：719～721

② 李迪.《九章算术》研究史纲.《九章算术》暨刘徽学术思想国际研讨会论文，北京，1991. 见：刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社，1993

③ 汤若望，德国人，1622年来华，1666年在北京逝世。这里所述汤先生不知是否为汤若望，年代已不对。待考。

④ 徐义保.《九章蠡测》研究. 见：数学史研究文集(第五辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993. 64～69

介绍了上图本的来源。另有“康熙丁酉(1717 年)十月朔日大兴薄有德序”8 页，“雍正戊申(1728 年)秋七月朔慈溪郑羽达顿首拜撰”6 页及“康熙丙申(1716 年)钱塘毛宗旦发凡”3 页。其总目为：

| | | |
|---|---|---|
| 首卷 | 大小数名 | 九章恒用法 |
| | 算学名诠 | 算误偶订 |
| 一卷 | 方田 | |
| 二卷 | 粟布 | |
| 三卷 | 差分 | |
| 四卷 | 少广 | |
| 五卷 | 商功 | |
| 六卷 | 均输 | |
| 七卷 | 盈朒 | |
| 八卷 | 方程上 | 方程下 |
| 九卷 | 勾股 | |
| 十卷 | 附三角 | 附八线 |

首卷“大小数名”主要讲“大数”与“小数”的数名及进位法，所载与《数术记遗》中的相同。“九章恒用法”定义，解释了一些基本的运算，如乘、除、加、减、三率准则、三率变则、约分、通分、命分、合分、课分等。“算学名诠”对传统古算与西算中的一些数学术语、名词进行了定义、解释，并对难字注了音。这些术语、名词有置、位、幂、率、衰、停、准、借、负、形、面、线、角、斜、超等 64 个。其对“率”写道：“率音律，约数也，总而约之曰率，又为彀率之率，有准的之意。故方法谓之方率，圆法谓之圆率，比例列数谓之三率，中数谓之中率，立法缜密谓之密率。大抵立一数于此，而为一定之法，则皆可谓之率也。”“算误偶订”是对一些错误算法的校正，共 9 题。

卷一“方田”，上图本、静嘉堂本均佚，其细目及内容无从知晓。卷二“粟布”，共有 16 个条目。其中最后两个条目“买物四

色”、“熔炼金铜铁锡”已散佚，“买物三色”仅存一题。前三个“度数”、“量数”、“衡数”主要是讲了不同单位的换算关系。“乘法”、“除法”、“三率准则法”、“重准则法”、“变则法”、“就物抽分”等条主要讲怎样用“异乘同除”、“同乘异除”解题。“贵贱率”讨论了“其率术”即求某一单位物值钱多少。“买物各停”的主要内容是讲用一定数量的钱能买多少价格不同但数量相同的物。“买物两色”是已知两物之间的一些数量关系，分别求出两物的价格、数量。

卷三“差分”、卷四“少广”，上图本缺，静嘉堂本有细目。现录于此：

差分　　合数差分　四六差分
　　　　三七差分　二八差分
　　　　倍增倍减差分　带子母差分
　　　　贵贱差分　匿价差分
　　　　和较三率　借衰互征
少广　　直形纵广互求　方形面斜互求
　　　　圆形周径互求附钱环形
　　　　杂形纵广互求　弧矢弦矢互求
　　　　方圆三凌物周积互求
　　　　圆法径周密率　方法面斜密率
　　　　开平方附命子　归除
　　　　带纵开平方　带纵平方诸变
　　　　开立方　带纵方廉开立方
　　　　开三乘方　开平圆
　　　　开立圆

卷五“商功”内容包括：求积定率、开筑求积[①]、互求高广、

① 静嘉堂本为“开筑求补”，恐误。

增减截量、开筑工程、仓窖容贮、平地委积、平尖堆垛、金玉重轻率。主要涉及：(1)穿、壤、坚、墟地的比率及阳马、鳖臑、刍甍等各种几何体的体积公式；(2)长、宽、高、体积间的互求；(3)以体积为桥梁，求截积之高广，用功之多少，贮粮之多寡；(4)垛积公式的应用。

卷六“均输”主要讲了用“三率法”计算徭役分配的问题，内容包括：均输輓、均征纳、均徭役、均税钞、均运载、均制造、均工作、均支给、均行程、均差实。

卷七“盈朒”分一盈一不足、两盈、两不足、一盈一适足、一不足一适足、叠数盈朒、子母盈朒、叠借互征，讨论了盈不足术的应用。

卷八“方程”分上、下两部分。“方程上”包括和数方程、较数方程、和较相杂方程、和较交变方程及带分方程、叠角方程、重审方程。“方程下”为方程省算、方程列位、方程刊误、方程御杂法。主要内容是求解多元一次线性方程组。

卷九“勾股”主要内容为：(1)勾、股、弦，及其和较、和和、较较、积等的互求；(2)勾股容方、容圆问题；(3)测量计算与方法问题。

卷十附录，包括三角、八线两部分。“三角”部分包括测算名义、三角例算、三角求积、三角容圆、三角容方、三角形外切圆或问和测量等内容，主要涉及到三角形角、边、积的互求及对内接、外切圆、内接正方形直径、边长的计算。“八线”部分给出了正弦、正切、正割、余弦、余切、余割的整度整分表和余切、余割的七度全分表，介绍了利用整度整分表求任意度数八线值的方法。

毛宗旦在《九章蠡测》发凡中说：

“《九章算术》，未见古本，数年以来仅得《周髀算经》、吴氏《九章比类》及《算海说详》、《算法统宗》、《几何原本》、《勾股

义》、《测量法义》、《数学钥》诸书，互相考订，皆大同小异。又得宣城梅氏《方程论》，极言方程古法废坠，诸本缺略不全，并多舛谬，专撰成书，凿然论断，依其术，录入是编。故方程卷帙独多，而《九章》诸法略称完备。是书所列设问，皆旧法也。方田、粟布、少广、商功、均输多本吴氏《九章》，差分、盈朒并开方诸变多出《算指》，方程专取梅氏论中诸法，勾股则兼取众说。"

由此可知，《九章蠡测》的内容主要来源于以上著作，尤其是吴敬《比类》、程氏《算法统宗》及梅氏《方程论》。

《九章蠡测》与中算的经典之作《九章算术》相比，在算题上相似的颇多，但文字、数据完全相同的却只有 33 题。卷五"商功"有 22 题同《九章》商功章前 22 题；卷六"均输"有 4 题同《九章》均输章第 3，19，20，21 题。卷九"勾股"有 7 题与《九章》勾股章第 1，2，3，5，9，10，12 题同。在算法上，尽管给出了许多面积、体积公式，使用了今有术、其率术、开方术、盈不足术、勾股术等方法，但对《九章》的算法理论体系，尤其是刘徽、李淳风等人的注释只字未提。我们知道《九章》之所以被奉为算之圭臬还在于刘徽等人所定的古代数学理论。《九章蠡测》就事论事，就题设解，没有把各种算法作为一个理论体系来考虑是一大缺陷。在体例上，《九章蠡测》深受《几何原本》的影响，每卷前都对该卷卷名、用途进行解释，其定义、说明所使用的一些名词术语、定率、公式，正文格式一般为题设、法置、按，这与《九章》的体例问、答、术有异。

虽然与《九章》相比较，这本书写得不尽如人意，但是，我们不能苛求古人，更不能脱离当时的时代背景来看问题。毛宗旦生活的清初，易见的算书仅《九章详注比类算法大全》、《算法统宗》及明末以后陆续刊刻的一些著作。而这些著作的作者，除吴敬"偶获(《九章》)写本"外，其余都未看到过真正的《九章》，更不用说刘徽、李淳风等人的注文。毛宗旦凭借引录他们的著作自

然达不到令人满意的水平，况且在清初的数学家中，真正对传统古算有所创新的，可能仅梅文鼎而已。

清初陈厚耀评价《九章蠡测》道："扆再所著《九章》有裨实用，余所见诸家著论多矣，未有若斯之委曲详尽者，法虽创自古人，而能一一扶其立法之原则，是书所独也。"①尽管该书没有多少创见，水平也不高，对后世也没有产生什么影响，但毛宗旦热衷学问，倾心数学研究的精神还是值得称道的。他精通当时已有数学知识，在中国数学史上把他作为清初一位数学家是无可厚非的。

与毛宗旦相类似，梅文鼎之后的屠文漪也对《九章算术》的内容进行过探求。屠文漪，字莼洲，江苏松江人，生卒年代不详。屠文漪因"其书(《九章算术》)不传"，故"特据所见近世之书，芟其繁谬，补其缺遗，以意隶之云尔"②，乃著《九章录要》12 卷。《九章录要》于乾隆四十六年(1781 年)收入《四库全书》内。卷一"乘除之法"，共有 13 个条目，讲通用的乘除之法。

卷二"零分法"，屠文漪在卷首讲到："凡数不能有整而无零分，有法以通之，则零不异于整也。知此而零分皆可相并减、相乘除，乃能尽《九章》之术。"③分 15 个条目讲述。

卷三至卷十一之一为仿《九章算术》体例而设为 9 卷，卷名分别是：方田法、粟米法、差分法、少广法、商功法、均输法、盈朒法、方程法、勾股法。

卷十一之二"勾股图说"。屠文漪因"勾、股、弦及诸较、和、更互相求法已备载于前，而其所以然之故，非图说不显"，故"首列《周髀》三图，而取后人图说，删其繁复，补其缺漏，正其迂

---

① 毛宗旦.《九章蠡测》薄有德序

② 屠文漪．方田法．见：九章录要．卷三

③ 屠文漪．零分法．见：九章录要．卷二

曲……"[①]，所以作"勾股图说"1卷。

卷十一之三"勾股测望法"。屠文漪讲到，"勾股法，所以施之测望而高深广远所求不同，且古人以表、后人以矩其法亦小异也……"[②]。下分14个条目进行讲解论述。

卷十二"借征法"，属《九章算术》法外之技巧，即借衰叠借之术，它是杜知耕《数学钥》中所未考的。

从总体来看，屠文漪缀集古代及当时之法以成《九章录要》一书，探求《九章算术》的内容，其中主要采录梅文鼎诸书，加以推阐，以尽其用。他的这种尝试和努力是应该肯定的。此外，王元启(1714～1780)《九章杂论》、谭文《数学寻源》(1750年)、屈曾发《九数通考》(又称《数学精详》，1772年)等著作，本意都是为了阐发《九章算术》等传统古算的原蕴。王元启还有《勾股衍》、《角度衍》等数学著作。

① 屠文漪．勾股图说．见：九章录要．卷十一之二

② 屠文漪．勾股测望法．见：九章录要．卷十一之三

# 第二章　梅文鼎、年希尧对画法几何的研究

中华民族自古以来擅长用图画表达自然现象和社会现象。从为数众多的彩陶、刻砖、瓦当、甲骨和青铜器等不同出土文物中可以看到用各种投影图法制作的图样。实际上，我们的祖先在工农业生产实践活动、美术创作以及数学理论探索中，很早就运用和研究了用平面图形来表现空间形体：正投影、轴测图（仿射变换）和透视图（中心变换），以表达实物形象。在建筑活动中例子尤多：正投影如山西大同云岗石窟北魏石刻（图 4.2.1），轴测图如四

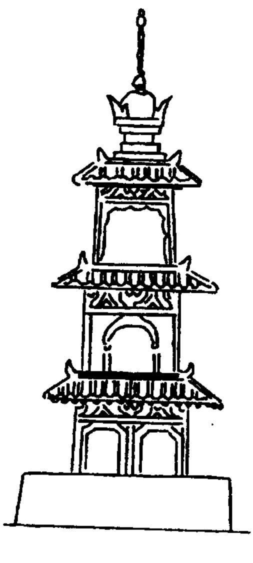


图 4.2.1

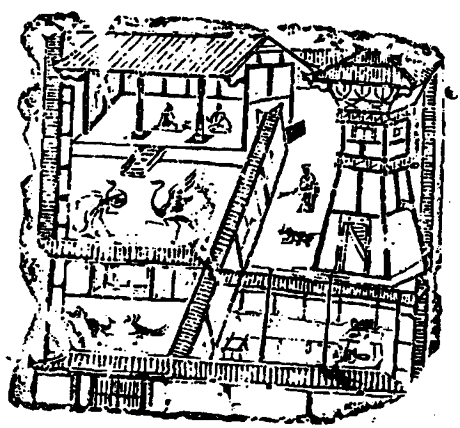


图 4.2.2

川成都杨子山汉代画象砖民居(图 4.2.2)，透视图如陕西西安大雁塔西门门楣佛殿石刻是唐代作品(第四卷图 7.2.9)。这些不仅为我们提供了当时已有高水平木结构的旁证材料，而且石刻本身是用平行透视画法作出的，所以还显示了当时高水平的制图技术。

宋代李诫(? ～1110)著《营造法式》(1103 年初版)，其中卷二十九至卷三十四含大量图样。它们有一定比例，厅堂用俯视图、正视图，采用正投影(图 4.2.3)，隼卯结构则用轴测图，以明确显示其中位置关系(图 4.2.4)。

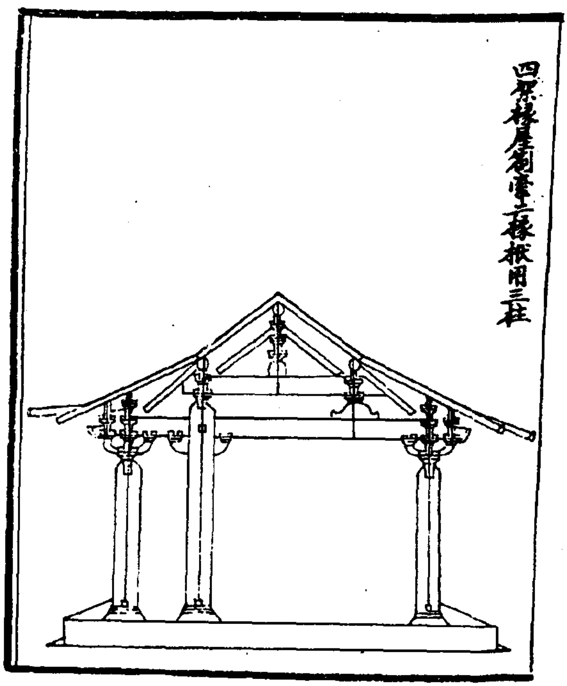



图 4.2.3

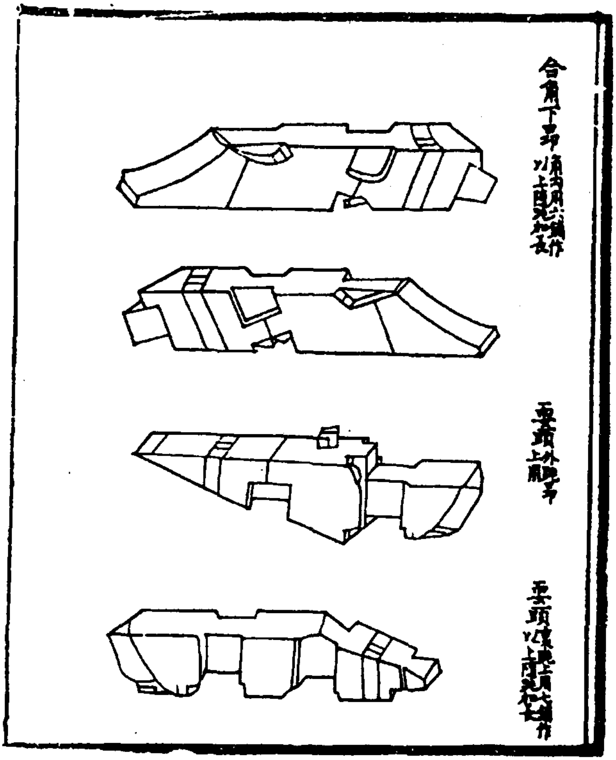


图 4.2.4

此外，宋画滕王阁图用轴测图画出，军事典籍曾公亮《武经总要》（11 世纪中叶）、北宋苏颂的名著《新仪象法要》（11 世纪末）、后来薛景石所作《梓人遗制》（1263 年）都有精美轴测画插图（图 4.2.5～图 4.2.8）。

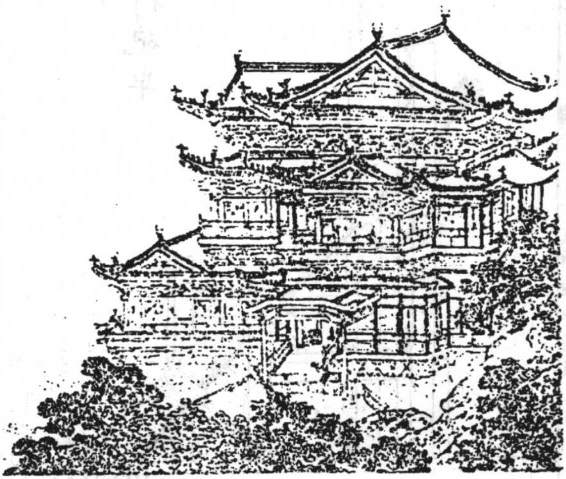


图 4.2.5

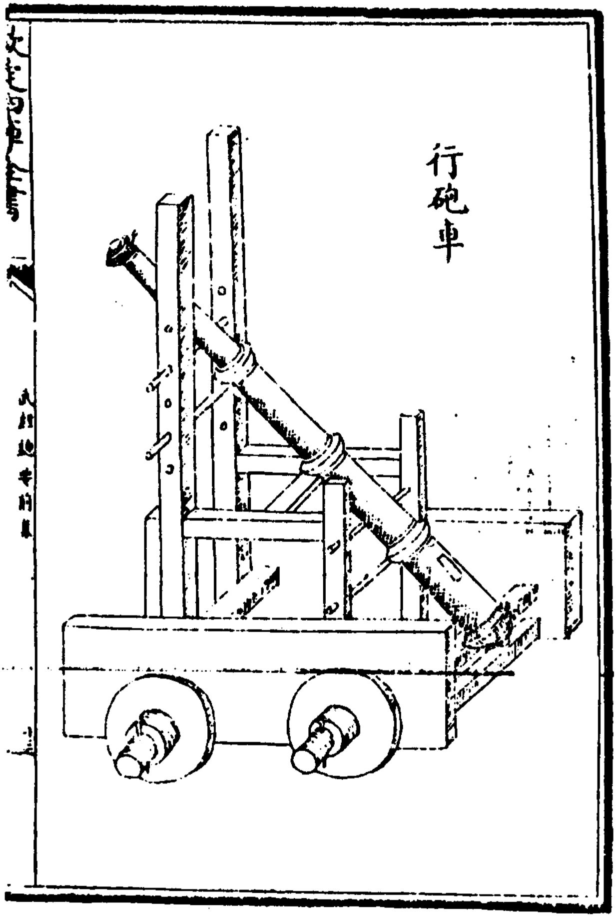



图 4.2.6

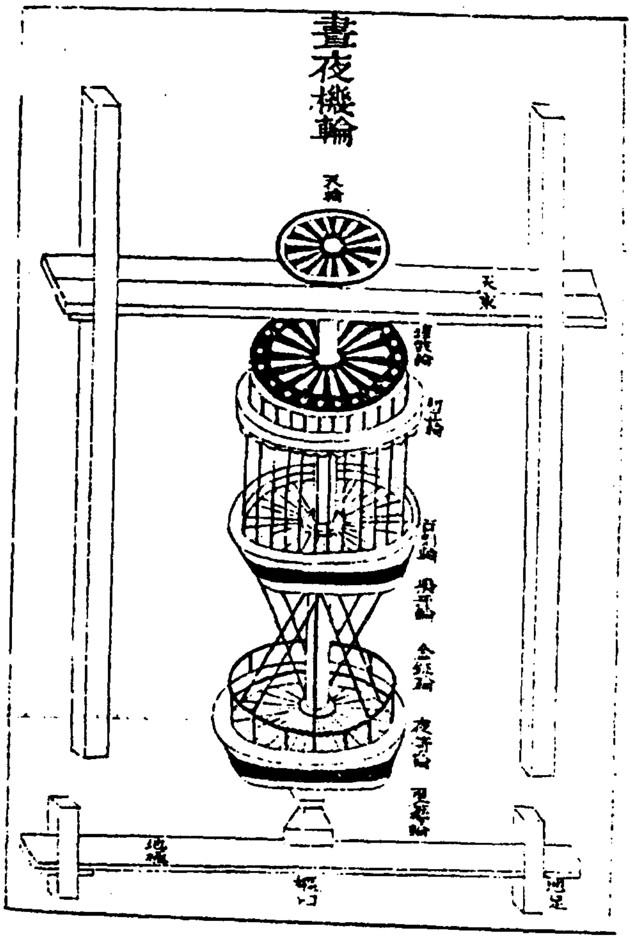



图 4.2.7

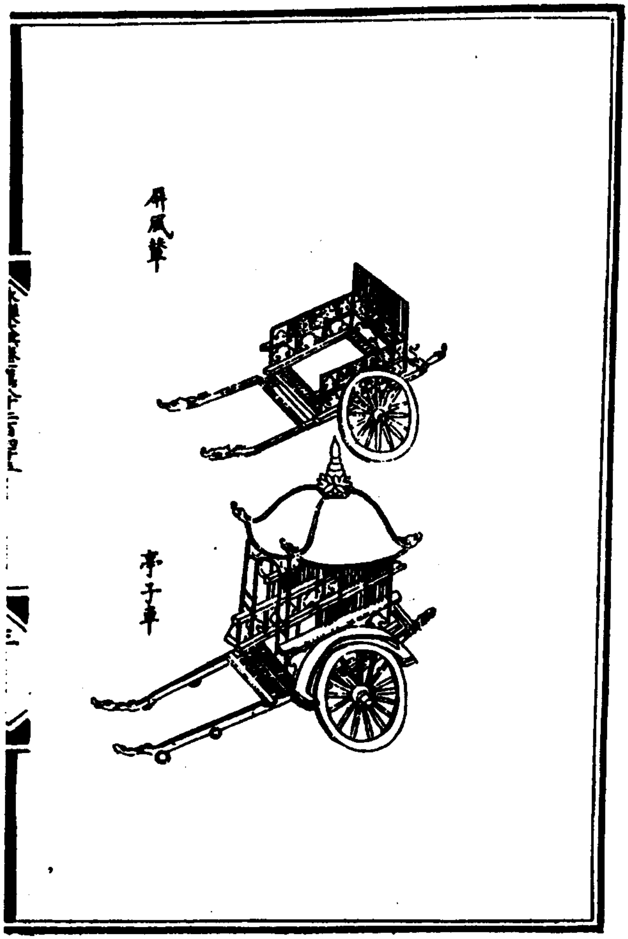



图 4.2.8

## 第一节　梅文鼎的仿射画法

远在三国时代刘徽注释《九章算术》时，就开始用图表达空间形体，可惜今存传本中刘注原图已失。但是以图释文这一优良传统传及清代，清初梅文鼎数学专著可以为代表。梅氏著作等身，被誉为清初历算第一名家。他生当西方科学传入中国之始，毕生致力于阐发西学要旨，表彰中算精华。在画法几何方面他有独特创见。

### 一、正多面体

在梅文鼎《几何补编》一书中，他借助于立方体的轴测图以作出其他四种正多面体。

**正四面体**　“四等面[①] 之六边各为立方形六面之斜线(对角线)而为相容之体。”[②]从图 4.2.9(1)知，当立方体的轴测图作出后，连结相应正方形面的对角线就得到内容正四面体的六条棱，从而正四面体的轴测图便已作成。

**正八面体**　“八等面在立方内以尖切面，凡六点。”[③]在图 4.2.9(2)中可见，借助于立方体易于作正八面体的直观图 。

**正十二面体和正二十面体**　梅文鼎在《几何补编》综合论述这两种立体当内容于立方体时，前者的棱在后者六个正方形面上的位置关系以及二者棱长间的定量关系很是明确，虽散见各卷，但论点完整：

“凡立方内容十二等面，皆以十二等面之边正切于立方各面之正中凡六。皆遥对如十字。假如上下两面所切十二等面之边横，对

---

① 四等面、八等面、十二等面、二十等面分别指正四、八、十二、二十面体。

② 梅文鼎．几何补编．梅氏丛书辑要同，卷一．一页

③ 梅文鼎．几何补编．梅氏丛书辑要同，卷四．八页

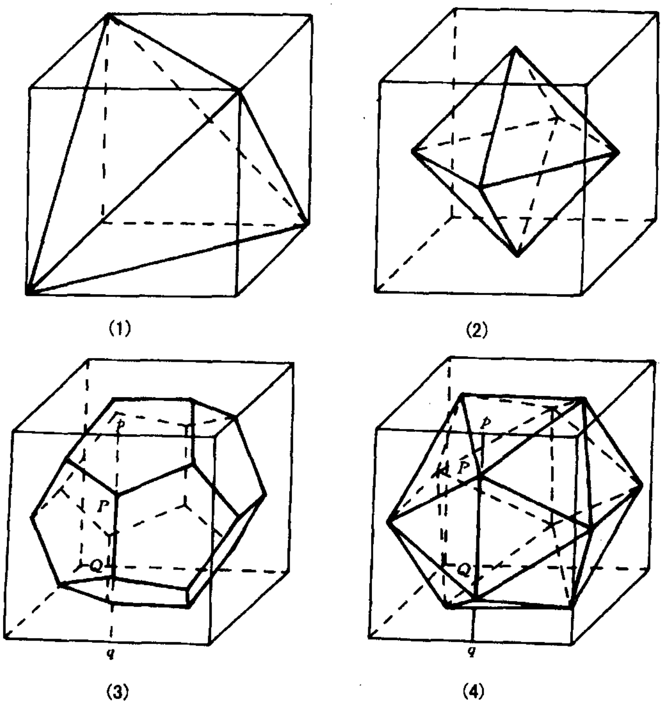



图 4.2.9

前后两面所切之边必纵，而左右两面所切之边又横。若引其边为周线，则六处相交皆成十字。立方内容二十等面、边亦同。”①

“十二等面、二十等面在立方内，皆以其边横切立方之面。两种各有三十棱，其切立方只有其六，以立方只有六面也。”②

“立方根③与所容二十等面之边若全数与理分中末④之大分。”

---

① 梅文鼎. 几何补编. 梅氏丛书辑要同，卷四. 十一至十二页

② 梅文鼎. 几何补编. 梅氏丛书辑要同，卷四. 八页

③ 立方根即立方体。

④ 理分中末今称中外比，即黄金分割。

"若十二等面、边为理分中末线之小分，求其全分，为外切立方也。"①

**正十二面体**　黄金分割立方体棱长，取其较短部分作为正十二面体棱长。正十二面体如与立方体相接，30条棱中与立方体相接的有6条。相接的6条棱都在立方体各面的中心线上，都两两平行。假如上下两棱是横着放，那么前后两面的棱竖着放，而左右两面所接棱又是横着放(图4.2.9(3))。

**正二十面体**　黄金分割立方体棱长，取其较长部分，作为内接正二十面体棱长。至于内外两体相接棱及其位置关系，则和内接正十二面体相同(图4.2.9(4))。

就是说在图4.2.9(3)中，$PQ=\frac{3-\sqrt{5}}{2}pq$，而在图4.2.9(4)中$PQ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}pq$。

## 二、球及球面三角形图解法理论

梅文鼎在《弧三角举要》(1～5卷,1684年)、《环中黍尺》(1～5卷,1700年)、《堑堵测量》(1～2卷,1703年)等书中，以仿射变换方法作出球体投影，从而解与球面三角形有关的问题，他说：

"弧三角(球面三角形)非图不明，然图弧线(大圆)于平面，必用视法(投影)变浑(球体)为平(面图)。"②

他提出过两种"视法"：仿射变换中的正投影和斜投影。

关于正投影，他说：

"立置浑仪(设想标有经纬度的天球仪)，使北极向上，而以二分平视之，(以春分、秋分点连线作为投射线方向)则惟极至交圈

① 梅文鼎．几何补编．梅氏丛书辑要同，卷二．十一页

② 梅文鼎．弧三角举要．卷一．十二页

(过南极、夏至、北极大圆)为外周不变。其赤道、黄道俱变直线为圆径，而成辏心之角(黄赤大距)是变弧线角为直线角也。又距等圈、纬线圈亦变横线，而成各度正弦。……其赤道上逐度经圈之过黄赤道者虽变椭形，而其正弦不变，且历历可见，如在平面。……是弧面各线皆可移于平面也。故视法不但作图之用，即步算之法(图解)已在其中。"①

"惟置身天外(无穷远处，使成平行投影)以平观(投影线与极至大圆平面垂直)大圈之立体，则周天三十六十经纬之度，擘划分

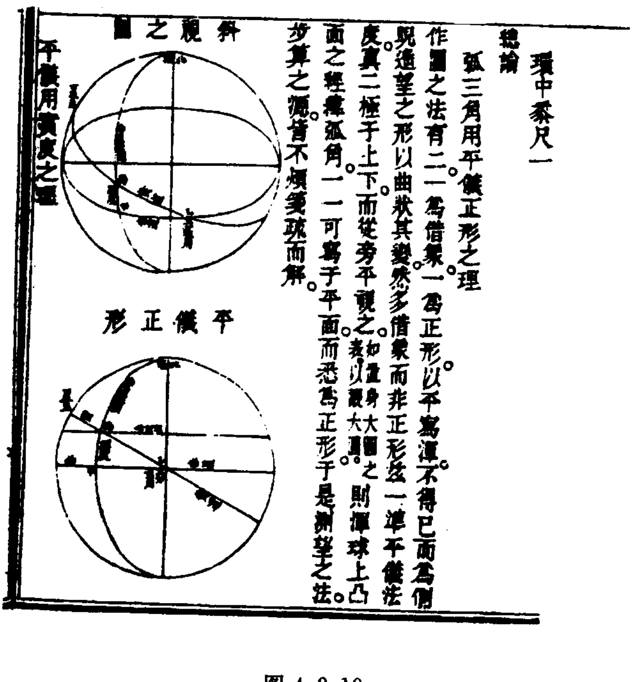



图 4.2.10

① 梅文鼎．弧三角举要．卷一．十二页

明，皆能变浑体为平面。……若有镂空玲珑之浑仪，取影于烛，而惟肖也。可以算法证仪，亦可以量法代算(形数统一)。”①

上述精辟见解可用图 4.2.10 上图诠释。

关于斜投影，他说：

“浑圆上有垛叠诸线(球面三角形的边)从旁侧视之(斜视，投影线不垂直于极至大圆平面)庶几可见。虽不能按度肖形(借以图解)而大意不失，以显弧三角之理，为用亦多(有直观意义)。”②(见图 4.2.10 下图)

### 三、大圆线段实长与投影长的关系

对正投影原理，梅氏又作进一步论述。在说明球面上的点与其投影图构成的一一对应关系时，他说：

“如浑球中剖，则成平圆，即面(投影面)也。于是球面之各点(球面三角形各顶点)依视法移于平面，即浑圆内相应之点也。”③

球面经过正投影后，球上各线(大圆)投影的变形规律，梅氏尤有中肯的阐述：

“平仪有实度(实长)、有视度(视长)。有直线、有弧线。……弧线在平面，则唯外周为实度，其余皆视度也。实度有正形，故可以量；视度无正形，故不可以量。然而亦可量者，以有外周之实度与之相应也；其近内之弧度渐以侧立而其线渐缩而短。离边愈远……其跻缩愈甚。至于正中，且变为直线，而与圆径齐观矣。此跻缩之状随度之高下而迁，其数无纪，故曰不可以量也。然而以法量之，则有不得而遁者。”④

除了上述定性叙述以外，梅文鼎对球面上各线段(大圆弧)的

① 梅文鼎. 环中黍尺·小引
② 梅文鼎. 弧三角举要. 卷一. 十三页
③ 梅文鼎. 弧三角举要. 卷一. 十一页
④ 梅文鼎. 环中黍尺. 卷二. 一至二页

投影与其实长之间的关系还作了定量描述。文字虽散见于各处，但其完整构思借以可作为球面三角形图解法的理论根据。可把它归结为三项性质。

**性质一**　极及其赤道(图 4.2.11)。

“浑球之外圈随处可指为极(如图 4.2.11 中的 $N$)，即有对度之极($S$)。两极相对，则皆有直线为主轴($NS$)。轴上作横径($WE$)。横径上下即皆有九十度之距(极)等经线(弧 $NE$，$SE$，$SW$，$NW$ 都等于 90°)。平仪(投影图)上直线皆纬度，而相交相错，其象不变(图中 $AA_1$，$BB_1$，…纬线圈投影)。”①

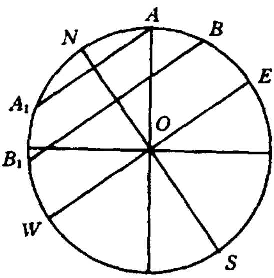



图 4.2.11

这说明球面正投影图周界上任一点都可以选为极：一经确定，就可以作出它的对极点和直径、赤道平面以及与赤道平面平行的纬线圈的正投影。

**性质二**　经线投影的实长(图 4.2.12)。

“置浑球于案(桌)……任依一纬变直切之，则成倒立之距(极)等圈($AA_1$)矣。此距等圈与中腰(赤道平面)之大圈($WE$)平行。……从此距等圈上逐度作经度弧($NA_2S$)，其距极亦皆等。特以侧立之故，各度之视度($NA_2$，$NA_3$)跻缩不同，而皆小于边之真度(弧 $NA$ 的实长)。其实与边度并

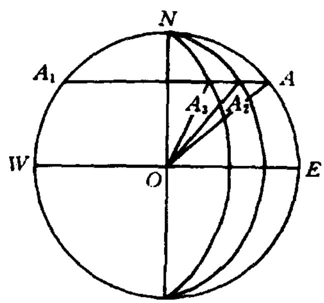



图 4.2.12

① 梅文鼎. 环中黍尺. 卷二. 六页

同，无大小也。”[①]

这说明经线弧段正投影与它的实长间关系图中 $NA_2$，$NA_3$，…，$NA$ 都是过同极 $N$ 的有同一长度的经线弧段的投影。虽视长 $NA_3<NA_2<NA$，而实长 $NA_3=NA_2=NA$。因此如果已知某一经线弧度，如 $NA_2$，投影，只要先作出直径 $NS$，再过 $A_2$ 作 $AA_2\perp NS$ 交周界圆于 $A$，那么弧 $NA$ 就是 $NA_2$ 的实长。

**性质三**　纬线投影的实长（图 4.2.13）。

“设（$NESW$）圈[②]，有 $AA_1$ 距等纬线，有所分（$A_2A$）小纬线。求其所载经度（或经线 $NAS$，$NA_2S$ 所夹经度角）。取距等半径（$AB$），作（$A_1CA$）半圆。从（$A_2$）作（$A_2D$，$A_2D\perp AA_1$，交半圆于 $D$），乃记（$AD$）弧为 $AA_2$ 之度（实长）。”[③]

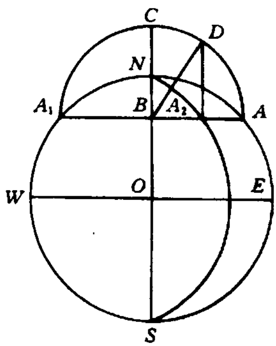


图 4.2.13

这是说，梅氏认为半圆 $A_1CA$ 是纬线投影 $A_1BA$ 的真形，所以他把 $AD$ 弧视为投影 $A_2A$ 的实长。

**四、球面三角形图解法**

梅文鼎在《环中黍尺》中论述球面上经纬线的投影图法之后，在卷二中又提出“论以量代算之理”。我们知道，球面三角形有六种基本问题。以 $A$，$B$，$C$ 表示球面三角形的三个角，$a$，$b$，$c$ 各为所对边。从问题已知件分类，这六种问题是 $a$，$b$，$c$；$a$，$c$，$B$；$a$，$b$，$B$；$a$，$B$，$C$；$A$，$B$，$C$；$A$，$B$，$a$。梅氏熟练运用经纬线正投影三项性质，图解这六种问题。在此介绍前面四种问题。

① 梅文鼎．环中黍尺．卷二．一至二页

② 梅氏原著用天干地支标记，此处引文改用拉丁字母。

③ 梅文鼎．环中黍尺．卷二．九页

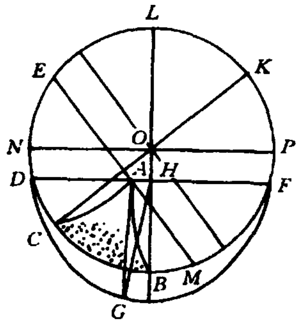



图 4.2.14

**问题一**　(图 4.2.14)已知三边 $a$，$b$，$c$，求三角。

梅文鼎的图解法分为两步：

(1)“今设弧三角形三边 $a,b,c$，而未知其角。法先作 $BNLF$ 圆。又作 $NP$，$BL$ 纵横两径。任以 $a$ 之度从 $B$ 量至 $C$，又自 $B$ 左右各量 $c$ 如 $BF,BD$。乃作 $DF$ 线连之，为 $c$ 之距等圈。又自 $C$ 作 $CK$ 经线，自 $C$ 左右各量 $b$，为 $CM$，$CE$。亦作 $EM$ 连线，为 $b$ 之距等圈。此二距等圈相交于 $A$，则 $A$ 点即为 $CA$，$BA$ 两边相遇之处，而又为一角(顶)也。乃自 $A$ 角到 $AB$，$AC$ 两弧，则 $ABC$ 三角形宛然平面矣。”①

这就是说，先把球面三角形经过正投影变换为平面图形 $ABC$：他在周界上取 $BC=a$，又取 $CE=b$，$BF=c$。以 $C$，$B$ 为极(性质一)作直径 $CK$，$BL$，又作 $EM\perp CK$，则点 $A$ 应在 $EM$ 上(性质二)。同理作 $FD\perp LB$，则点 $A$ 又在 $DF$ 上。于是二者的交点就是所求第三角顶的投影 $A$。也就是说，三角形 $ABC$ 是所求正投影图，有了正投影图就可以求出答数——以量代算。

(2)“再以法量之，则 $B$，$C$ 两角亦俱可知。欲知 $B$ 角：以半线(径)$DH$ 为度，以 $H$ 为心，作 $DGF$ 半圆。以 $DF$ 径上距等圈上之真形也。乃自 $A$ 点作直线 $AG$ 与 $BL$ 平行，截半圆于 $G$……$GD$ 即 $CBA$ 锐角之度。”②

这就是说，根据正投影三角形 $ABC$ 求各角的实际度数，从性质二知$\angle DHG$ 就是所求角。

---

① 梅文鼎．环中黍尺．卷二．三页

② 梅文鼎．环中黍尺．卷二．四页

**问题二**　(图 4.2.15)已知两边 $a,c$ 及其夹角 $B$，求边对角 $A,c$ 及角对边 $b$。

解法也分两步：

(1)“又设弧三角形 $ABC$。(已知) $B$ 角，$a$ 边 $c$ 边，求对角之边 $AC$。法先作 $WBPL$ 大圈。作 $WP$，$BL$ 十字(直)径，乃自 $B$(量)至 $E$ 如所设 $a$，自 $B$ 至 $F$ 亦如之。作 $FME$ 为 $a$ 之距等圈。又以距等之半数 $ME$ 为度(半径)，$M$ 为心，作 $FNE$ 半圈，$NE$ 弧如所设 $B$ 角，而自 $N$ 作 $NC$ 直线，与 $MO$ 平行至 $C$。遂如法作 $CB$ 边。自 $B$ 至 $A$ 如所设 $c$ 边。又从 $A$ 过心 $O$ 至 $D$ 作大圈径，亦作 $QR$ 横(直)径。乃补作 $CA$ 边。($ABC$ 三角弧形投影已作)。”①

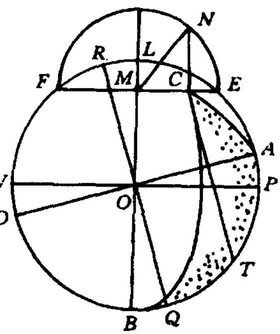


图 4.2.15

这就是说，在球的正投影上作正交直径 $WP$，$BL$，又在周界上取 $BE=a$，作 $EF\perp BL$。从性质三可知所求点 $C$ 应在 $EF$ 上。又以 $EF$ 为直径作半圆，取$\angle EMN$ 等于已知夹角 $B$。再作 $NC\perp EF$，从性质二知 $NC$ 对 $EF$ 的垂足就是所求的 $C$ 点。

(2)“又自 $C$ 到 $T$ 等距线与 $QR$ 平行，自 $A$ 至 $T$ 得 $AC$(实度)。②”

这就是说，根据性质三，以 $A$ 为极，问题已归结为：求 $AC$ 边投影的实长。作 $CT\perp AO$，与周界交于 $T$，则 $AT$ 是所求边 $b$ 的实长。问题解至此，三边已知，已归结为问题一，借以求其余未知的角。

**问题三**　(图 4.2.16)已知二边 $a$，$b$；$b$ 的对角 $B$。求其余一边及另外二角。

---

① 梅文鼎．环中黍尺．卷二．四页

② 梅文鼎．环中黍尺．卷二．五页

对这一问题的图解，梅氏认为：

“若先有对角边 $AC$，角旁边 $CB$，有角 $B$ 而求角旁边 $AB$。法先作 $LPB$ 圆及十字(直)径线。又以 $CB$ 边之度 $BE$ 及 $BF$。作 $EF$ 距等线。又作 $FNE$ 半圆，取 $NE$(如 $B$ 角)作 $NC$ 直线。遂从 $C$ 作 $CB$ 边，皆如前，以所设 $CA$ 边倍之。于本圆周取其通弦。乃以通弦线就 $C$ 点迁就游移，使合于外周而不离 $C$ 点成 $DCK$ 线；乃以弧度折半于 $A$，则外周之度即所求 $AB$ 边。”[①]

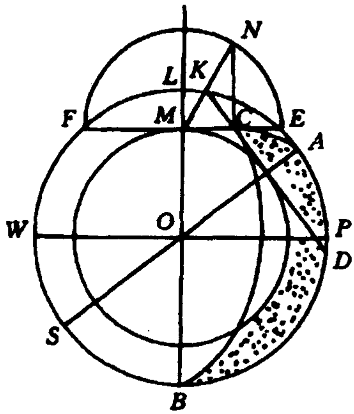



图 4.2.16

这就是说，对这一具体问题的解法：先在周界上取 $BF=a$，作正交直径 $BL$，$WP$。又作 $CF \perp BL$，则所求 $C$ 点应在 $EF$ 上。以 $EF$ 为直径作半圆，并作$\angle NME=B$，再作 $NC \perp EC$，则垂足就是所求 $C$ 点的投影。

关于点 $A$ 的作法：先作一弦，使它的弧长是 $2b$，然后“迁就游移”，是使弦的一端过 $C$ 点，另一端不离外圆。这实质上就是以 $O$ 为心作圆，使它的半径恰是弧长为 $2b$ 的弦的弦心距，然后过 $C$ 作此小圆的切线 $KD$。再从 $O$ 引 $OA \perp KD$，交外圆于 $A$。$A$ 就是所求 $A$ 的投影。这是因为如把 $A$ 看成极，经线弧长的实长就是弧 $AD=b$。

问题解至此已化为问题一，借此可求其余未知角。

**问题四** (图 4.2.17)已知二角 $B$,$C$ 及夹边 $a$，求其余边、角。

对此题的图解，梅文鼎也分两步：

① 梅文鼎. 环中黍尺. 卷二. 五页

(1)“若先有 $B$，$C$ 两角及 $BC$ 边。在两角(顶)中，先作……$C$ 角。法于 $ED$ 横径，如前法求 $HO$ 如所设 $C$ 角之度。遂从 $H$ 点作弧，则 $C$ 角成矣。次作 $B$ 角。法于 $B$ 点作 $BK$(直)径。亦作 $TL$ 横径。乃自 $L$ 至 $Q$ 如前法求 $LQ$ 如所设 $B$ 角之度，遂以 $M$ 点作弧，则 $B$ 角亦成矣。两弧线交于 $A$ 角。”①

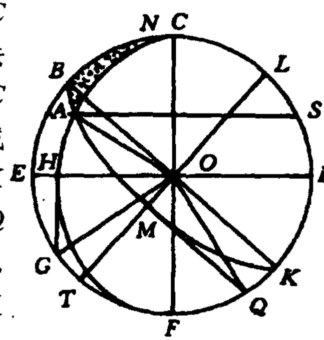



图 4.2.17

这就是说，在外周上先取 $BC=a$。又作 $CF$，$ED$ 两正交直径。$A$ 点投影的作法为：作 $\angle EOG=C$。又作 $OH\perp EO$，则经线 $CHF$ 与经线 $CEF$ 夹经度角 $C$。因此 $A$ 点应在经线 $CHF$ 上。又作 $BK$，$LT$ 两正交直径。作 $\angle LOQ=B$，又作 $QM\perp LT$，则经线 $BMK$ 与经线 $BLK$ 夹经度角 $B$。因此 $A$ 点也应在经线 $BMK$ 上。这二经线交点就是所求点 $A$。

(2)“乃补作 $AN\perp BK$，$AS\perp CF$ 两距等线(纬线)，则弧度皆得。”②

这就是说，在三角形 $ABC$ 的正投影上，从 $A$ 点引 $AN\perp BK$，遇周界于 $N$，弧 $NB$ 是弧 $AB=c$ 的实长。又从 $A$ 引 $AS\perp CE$，遇周界于 $S$，弧 $CS$ 是弧 $AC=b$ 的实长。至此，问题四的解已归结为问题一。

值得注意的是，上述四种球面三角形问题图解法中，前面三种都凭借欧几里得尺规作图 规则得到精确解，而第四种却是近似解：两弧 $BMK$，$CHF$ 是通过三点徒手画出的椭圆，因此二者交点位置是近似的。在自注中，梅文鼎也觉得不放心，在解法最后

① 梅文鼎. 环中黍尺. 卷二. 五至六页

② 梅文鼎. 环中黍尺. 卷二. 六页

议论说："按此两弧线必以鸡子形（椭圆）作之"，只有"若点（两弧线交点）离横（直）径不远，则所差亦不多也。"

### 五、证明球面三角形有关命题[1]

见第二编第二章第五节，此处不赘。

## 第二节　年希尧的透视画法

### 一、年希尧及其《视学》

年希尧（？～1739），字允恭，汉军镶黄旗人，清初知名人氏年羹尧的哥哥。年希尧曾任皇家陶瓷督造、宫廷画师，他又从意大利籍郎世宁（P. J. Castiglionne，1688～1766）学习透视画法30年，以心得著《视学》一书，1729年初版，1735年增订后再版，再版不分卷，也不编页码，共150页左右。《视学》立论正确，图版精美，在同时期数学专著中屹立拔群，但曲高和寡，致长期湮没，鲜为人知。即阮元《畴人传》虽为年氏立传，也未及《视学》书名。传中仅说在年氏著作中"又一种无名目，字迹图书并极精美，而不署著者姓氏，疑亦出希尧家也。"后来《视学》晦而复显：初版已亡，其再版海外存两部，国内也存两部[2]。业师钱宝琮说："《视学》是介绍西欧画法几何学的最早一部著作，书中所附图版俱极精美，然此书印数不多，流传至今者甚少。"[3]笔者于60年代初期从北京图书馆得此书缩微胶卷（阳文）一份，赖读图机放大，图及说明文字一一描写，伏案半载，仔细研读，渐悟其意。1982年笔者从比利时出席中国科学史首届国际会议，归访自然科

---

① 略，见：沈康身．17～19世纪我国在球面三角学方面的研究成果．杭州大学学报（自然科学版），1980(8)：48～49

② 英国牛津大学Bodlean图书馆、法国巴黎国家图书馆各藏一部，北京图书馆、自然科学史研究所各藏一部．互有缺损，而以后者较完整。

③ 钱宝琮．中国数学史．北京：科学出版社，1964，267

学史研究所严敦杰所长，承借阅所藏《视学》，并允拍摄照片数十页。此书版本很大，通高37.5厘米，宽23厘米。1993年河南教育出版社编印《中国科学技术典籍通汇》，《视学》收入数学卷第4册[①]。《视学》从此有页码：711～858，但版面已视原著为小。高宽均缩为原件之半。

## 二、《视学》内容分析

年希尧把从西方学习所得的透视画法与我国传统绘画理论相结合，持论中肯、正确。正如他在《视学》的序中畅论：

“始以定点引线之法……能画物类之变态，一得定位，则蝉联而生。虽毫忽分秒不能互置。然后物之尖斜平直、规圆矩方、行笔不离手纸，而其四周全体一若空悬中央，面面可见。至于天光遥临，日色旁射，以及灯烛之辉映，远近大小，随形呈影，曲折隐显，莫不如意。”[②]

“凡仰阳合复、歪斜倒置，下观、高视等线法，莫不由一点而生。追细究一点之理又非泰西所有，而中土所无者。凡目之视物，近者大、远者小，理有固然。即如五岳最大，自远视之，愈远愈小，然必小至一星之点而止……由此推之，万物能小如一点，一点亦能生万物。因其从一点而生，故名曰头点[③]。从点而出者成线，从线而出者成物。虽物类有殊异、与点线有差别，名或不同，其理则一。再如物置面前，远五尺者若干大，远一丈者若干大，则用点割之，谓之离点[④]，而远近又有一定不易之理矣。试按此法，或绘成一室位置，各物俨若所有，使观者，如历阶级，如入门户，如升堂奥，而不知其为画。或绘成一物，若悬中央，高凹平斜，面

---

① 据自然科学史研究所藏本影印。

② 年希尧.《视学》初版序言

③ 今称主点。

④ 今称量点。

面可见。借光临物，随形成影，拱凹显然，观者靡不指为真物。”①

上引各段可以视为年氏对透视学的概论。实际上，透视图是指在物空间的目标(几何图形)通过视点为顶点的视线(投射线)棱锥在画面上的交点集。为分析《视学》所论各题，现按照现代透视学习惯把透视学通用词汇及其简记字母表示如图 4.2.18.

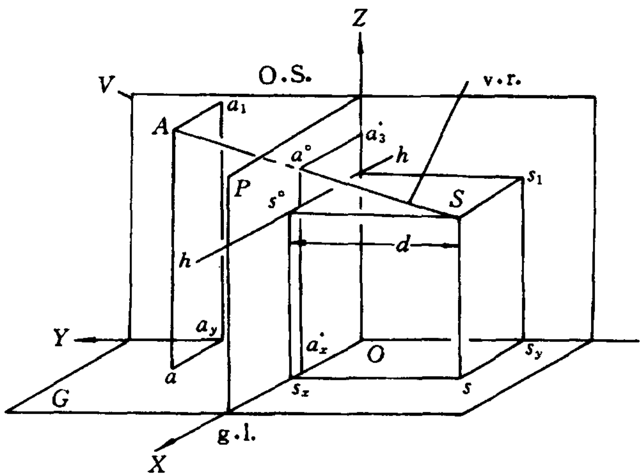



图 4.2.18

《视学》所论透视学内容有以下四方面。

1. 量点法作图

《视学》首先设题(图 4.2.19)：

“设 $ABCD$② 大平方，欲斜视。或右或左先画一视平线($hh$)，

---

① 年希尧.《视学》再版序言

② 用拉丁字母代替原著中的天干地支记法。

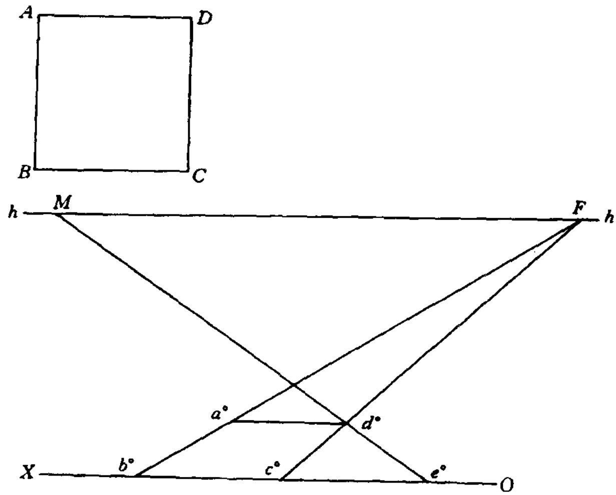



图 4.2.19

再画一地平线(基线 $OX$)。定头点(主点即灭点)①$F$ 于中。定离点(量点 $M$)于左。在方图上量 $BC$ 尺寸,定出地平线上左如 $b^\circ c^\circ$。次将 $DC$ 之尺寸量于地平线上,如 $c^\circ e^\circ$。从头点 $F$ 作斜线至 $b^\circ$、至 $c^\circ$ 作二线。从左离点引线至 $e^\circ$。……与 $Fc^\circ$ 线相交于 $d^\circ$ 点。从 $d^\circ$ 作平线交 $Fb^\circ$ 于 $a^\circ$,成 $a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ$ 斜方,即 $ABCD$ 之尺寸也。”(第 717 页)②

在此,年希尧用量点法作出了在题给条件下正方形 $ABCD$ 的透视图 $a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ$。用同样方法《视学》又作了矩形、由矩形组成的图形以及三角形、多边形的透视图(图 4.2.20)。在平面图形透视图作法基础上《视学》又进一步作出立体的透视图,下面选析其中五个例子。

---

① 视点在投影面上正投影,所有与画面垂直的平行线在画面上的透视图成为交于一点(灭点)的线束。

② 指《中国科学技术典籍通汇·数学卷》本《视学》页码,下同。

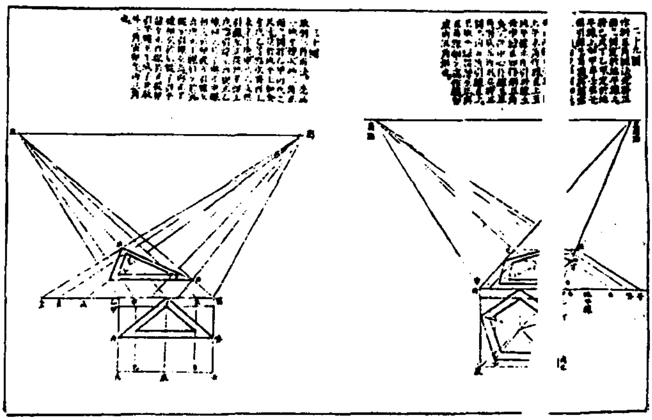


图 4.2.20

**例题一**　(图 4.2.21)(第 721 页)求作长方体透视图。图中左侧画长方体的正视图和俯视图。视平线($hh$)、灭点 $F$、量点 $M$、基线 $OX$ 为已给。《视学》的作法是借助于已给条件，先作出俯视图的透视图 $e^\circ f^\circ g^\circ h^\circ$。再在 $OZ$ 轴上量取长方体的实高 $g^\circ c^\circ$。连结 $c^\circ F$，$g^\circ F$，得 $h^\circ$处透视高度 $h^\circ d^\circ$。量取 $f^\circ b^\circ$等于实高，得 $e^\circ$处的透

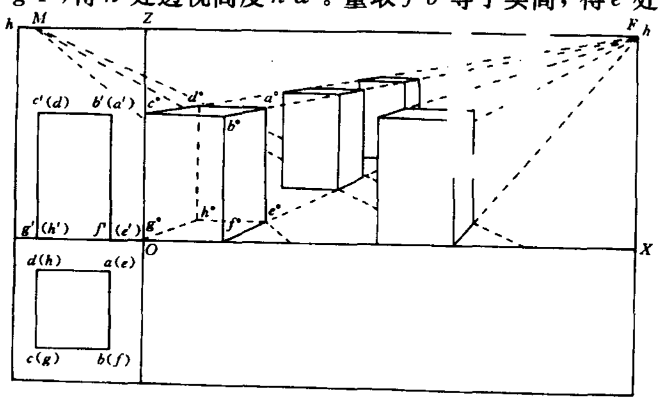



图 4.2.21

视高度 $e^{\circ}a^{\circ}$。图形 $a^{\circ}b^{\circ}c^{\circ}d^{\circ}$-$e^{\circ}f^{\circ}g^{\circ}h^{\circ}$ 就是所求的透视图。

**例题二**　(图 4.2.22)(第 752 页)《视学》把任何立体的俯视图的透视图看成是立体在不同层次上特征点俯视透视图的总和。因此在例题一作法基础上，当各层次上的特征点透视高度一经确定，分离各层次透视图上的相应点，就可以作出所要求物体的透视图。

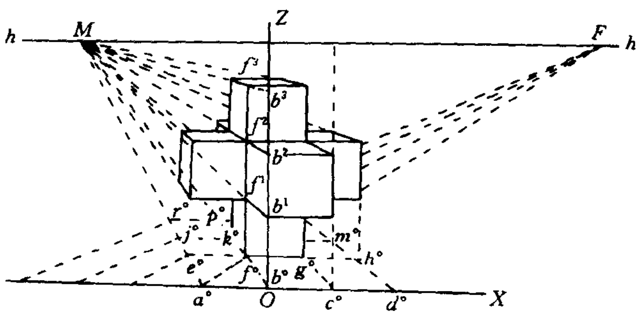



图 4.2.22

图中，年希尧已作出三维正交方柱体透视图，原著图无文字说明，而从所引虚线可以窥知其作图过程。

三维正交方柱俯视图的透视图格网为梯形，其 16 个特征点为 $a^{\circ}$，$b^{\circ}$，…，$r^{\circ}$，$s^{\circ}$。立体分 0，1，2，3 共四层次。其底(0)层特征点透视高度为 0，其透视图为 $f^{\circ}g^{\circ}k^{\circ}l^{\circ}$($l^{\circ}$图中未画出)。

在 $OZ$ 轴上取各层实高 $b^{\circ}b^1$，$b^1b^2$，$b^2b^3$，连结 $b^1M$，$b^2M$，$b^3M$，与从 $f^{\circ}$ 所引垂直线(平行于 $OZ$ 轴)分别交于 $f^1$，$f^2$，$f^3$。三者分别是 $f^{\circ}$ 所对应的第 1，2，3 层次上的透视图①。同理可作其他各特征点的透视图。用线段依立体具体情况适当连接这些点，就得到所求立体的透视图。

**例题三**　(图 4.2.23)(第 758 页)《视学》作立体透视图时，

① 这就是说，$f^0f^1$，$f^0f^2$，$f^0f^3$ 是相应点的透视高度。

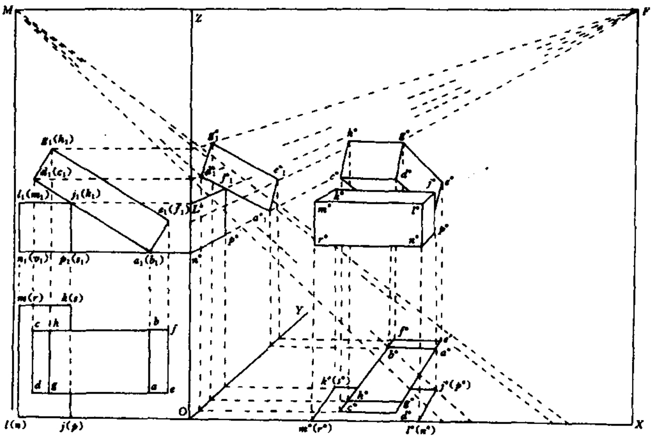


图 4.2.23

先作立体的二视图(正视图、俯视图)。例题三原著有文字说明:

"欲作两(长)方体,一体正置,一体仰靠其上。其法画一仰立侧面(今称正视图)$g_1(h_1)e_1(f_1)a_1(b_1)d_1(c_1)$及$l_1(m_1)j_1(k_1)p_1(s_1)n_1(r_1)$。今二体侧面已有,而正视(今称俯视图)面未定。将$g_1$,$e_1$,$a_1$,$d_1$四角(顶点)作垂线向下。$l_1$,$j_1$,$p_1$,$n_1$亦作垂线,定体之宽(如$fe$,$kj$)。如$efhg$即(上一体)上(表)面$g_1e_1$(的俯视图),$abcd$即下(表)面$d_1a_1$(的俯视图)。如$kjlm$即(下一体)上(表)面$j_1l_1$(的俯视图)。上一体系上仰之体,故取上下两面,正立(下一)体只取上一表,而下一面亦在其中。"

当画出上下二长方体的二视图后,《视学》以图框上边为视平线,左上角、右上角分别为量点$M$、灭点$F$,进一步作透视图。为避免作图辅助线过多,年希尧对例题二作图法又有变通。作竖轴$OZ$,再在$OX$轴上方取适当位置作俯视图的透视图$l^\circ j^\circ\cdots k^\circ m^\circ$。又从正视图各特征点如$g_1$,$d_1$,…,$a_1$引水平线,在$OZ$轴上截取各实高,这些交点分别与灭点$F$连结。

从俯视图的透视图各特征点引水平线与 $OY$ 轴的透视图相交。从这些交点引垂线截取对应的透视高度，就得到正视图的透视图 $l^\circ_1 j^\circ_1 \cdots k^\circ_1 m^\circ_1$。此图结合俯视图的透视图，最终获得所求二长方体的透视图 $a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ$-$e^\circ f^\circ g^\circ h^\circ$ 以及 $j^\circ k^\circ l^\circ m^\circ$-$n^\circ p^\circ s^\circ r^\circ$。

**例题四**　(图 4.2.24)(第 792 页)图左侧画着倾斜放置的长方体二视图：对水平投影面倾斜 40°，对正视投影面倾斜 30°。从原著图样所绘辅助线(虚线)可以清楚地看到年希尧对正投影(仿射)变换的作图步骤，从此我们可以鉴赏年氏在仿射画作法方面的水平。

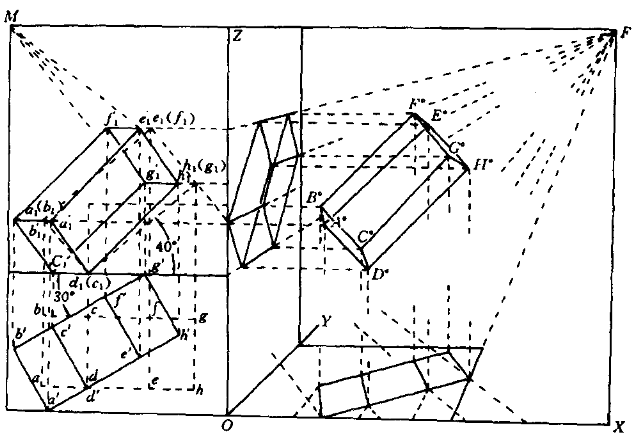
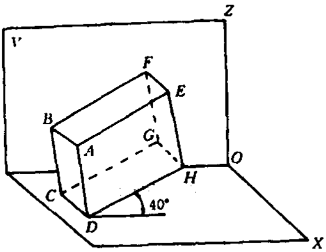
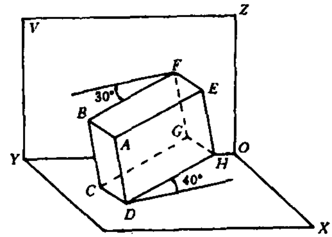



图 4.2.24

(1)作长方形底面与水平投影面倾斜 40°的二视图。这相当于使长方体绕 $CD$ 自下而上地旋转与基面 $S$ 夹 40°角。因此除 $C$，$D$ 位置不变外，其余顶点的位置都引起变化(图 2.4.25(1))。对照原著图中已作出变换后的投影图：俯视图 $ab \cdots gh$，正视图 $a_1 b_1 \cdots g_1 h_1$。




(1)




(2)

图 4.2.25

(2)长方体底面与基面 $S$ 倾斜 $40^\circ$ 角，再使背平面 $BCGF$ 自后向前旋转，使与竖立投影面 $V$ 夹 $30^\circ$ 角(图 4.2.25(2))。投影结果：俯视图形状不变，而其位置正如原著图所示已变为 $a'b'\cdots g'h'$，其正视图为 $a_1'b_1'g'_1h'_1$。其中各顶点，例如 $e'_1$，其高度与(1)中正视图中对应点 $e_1$ 相等，而与俯视图对应点 $e'$ 在同一竖直线上。

于是长方体经过两次旋转所得二视图既经确定，就仿照例题三作图法以图框左上角为量点 $M$，右上角为灭点 $F$，图框下底边为基线 $OX$ 作出所求透视图 $a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ\text{-}e^\circ f^\circ g^\circ h^\circ$。

**例题五**　(图 4.2.26)(第 722 页)年希尧以其对透视学深邃的认识，还用水平切片法作球的透视图。原著说明文字用词简练，所论精到：

“圆球正视者其体浑圆，只用规一圆环即得。若旁视必成腰圆，离头点愈远、愈腰，其法将所设球径，画一圆环地面。如甲乙丙丁，照前法用头点于地平线上作斜方，如戊己庚辛，侧面如子丑壬癸，次将寅卯庚三点之中平分，如巳午二点，从巳点作垂线，下至角线，得未点。自未点作平线至戊辛对角线上，得申点。从头点作辐线至地平线，得酉点。将酉辛之短线在甲乙丙丁图上，自戊点上量得亥点，自亥点上作垂线，次从环心开规，以天点为界作一环如天地元黄。再自甲乙丙丁环上宇点对上作垂线得宙点。从

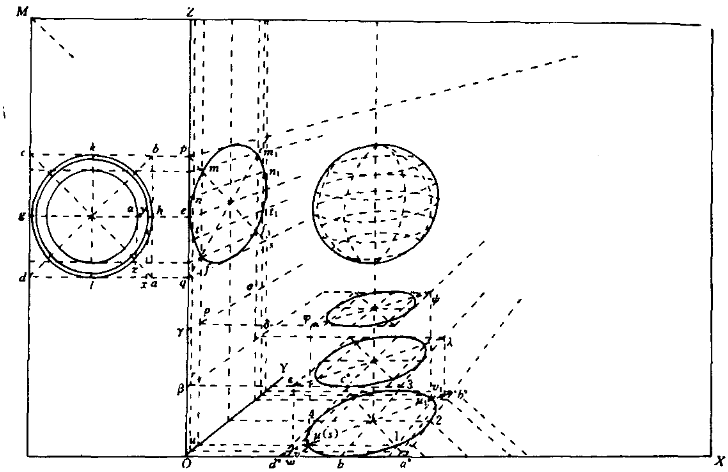


图 4.2.26

环心以宙点为界作一环，如宙洪荒日。将二环亦画于头点地面斜方内。有此二环，而上面之全体画得矣。”

“今再立一法更觉明显。自斜方环上酉月二点向上作垂线，在侧面上往秋巳午垂线上取藏闰二点作平线，得盈昃二点，即得斜方第二环，自二环上晨宿二点向上作垂线，在侧面上寒暑寅辰垂线上取秋冬二点，作平线，得列、张二点①，即得斜方第三环，有此三环，环内各得六点。上面球体之上下前后左右六面全体毕现矣。”

对此500字用古汉语写的说明文字及其精美插图试作现代语言图释：

视线垂直于球的大圆，球的视图是圆，只要画一个圆就行了。

① 《视学》除用天干地支标记特征点外，不够用时还用《千字文》为序："天地玄(元)黄，宇宙洪荒，日月盈昃，辰宿列张，寒来暑往，秋收冬藏，闰余成岁，律吕调阳，……"

如果斜视，那么它的轮廓视图是椭圆，球离视点愈远[①]，它的视图椭圆愈扁。作球透视图的步骤如下：先作球的俯视图 $gkhl$ 及其外切正方形 $abcd$，按常规作法，借助于灭点 $F$、量点 $M$ 在基线 $OX$ 上方作出俯视图的透视图如 $a^{\circ}b^{\circ}c^{\circ}d^{\circ}$。其次在 $OZ$ 轴上，定球的实高(直径)$pq$。然后从俯视图的透视图得到正视图的透视图 $qprs$。连结 $F$ 与弧 $me$ 的中点 $n$，弧 $ef$ 的中点 $t$。连线 $nt$ 交圆透视图的另一侧于 $n_1$，$t_1$ 两点，$nt$ 还交 $OY$ 轴的透视图于 $u$。从 $u$ 引水平线交俯视图的透视图对角线于 $v$，连结 $F$，$v$，交 $a^{\circ}d^{\circ}$ 于点 $w$，将长度 $d^{\circ}w$ 量在俯视图 $da$ 上，使 $ax=d^{\circ}w$。自 $x$ 引竖直线与圆直径 $gh$ 交于 $y$。以 $Oy$ 为半径作圆二。又自对角线与圆 $gkhl$ 交点 $z$ 引垂直线交 $gh$ 于 $\alpha$，以 $O\alpha$ 为半径作圆三。将这两个同心圆也用量点法在基线上方作出透视图。有了这三个圆的透视图，则所求球各层(小圆)的透视图也就完全确定了。

为使图样清晰，也可以另法分层绘制：从大圆的透视图 $d^{\circ}b^{\circ}$ 上点 $v_1$(后者作法与 $v$ 相同)向上引竖直线。在 $OZ$ 轴上量取线段 $O\beta=qe$。连结 $B$，$F$ 与 $nt$，$n_1t_1$ 延长线作于 $r$，$\delta$，过此两交点作水平线与自 $v$，$v_1$ 所引竖直线分别交于 $q$，$\lambda$ 两点。以此两点为顶点，作正方形透视图，借此可以作圆二的透视图，从大圆的透视图与对角线交点 $\mu$，$\mu_1$ 向上引竖直线，又在 $OZ$ 轴上量取线段如 $B\nu=ep$。连结 $\nu$，$F$，与 $mf$，$m_1f_1$ 两竖直线分别交于 $\rho$，$\sigma$ 两点。过此两点引水平线与自 $\mu$，$\mu_1$ 所引竖直线交于 $\varphi$，$\psi$ 两点。以此两点为顶点作正方形透视图，借此可以作出圆三的透视图。

有了这三个透视图，每图内各含六点。例如大圆透视图上标记了 1～6 六个点，那么所求球的透视图上下、左右、前后六(五)个切平面特征点可以全部作出。

2. 灭点(格网)法作图

---

① 这句话不正确，应改为投射线与画面夹角从 90°愈变小。

年画是我国民间特有传统绘画体裁。现在有兴趣地看到《视学》第815～818页用一点透视格网法作中国元宵灯会热闹场面的透视图年画。

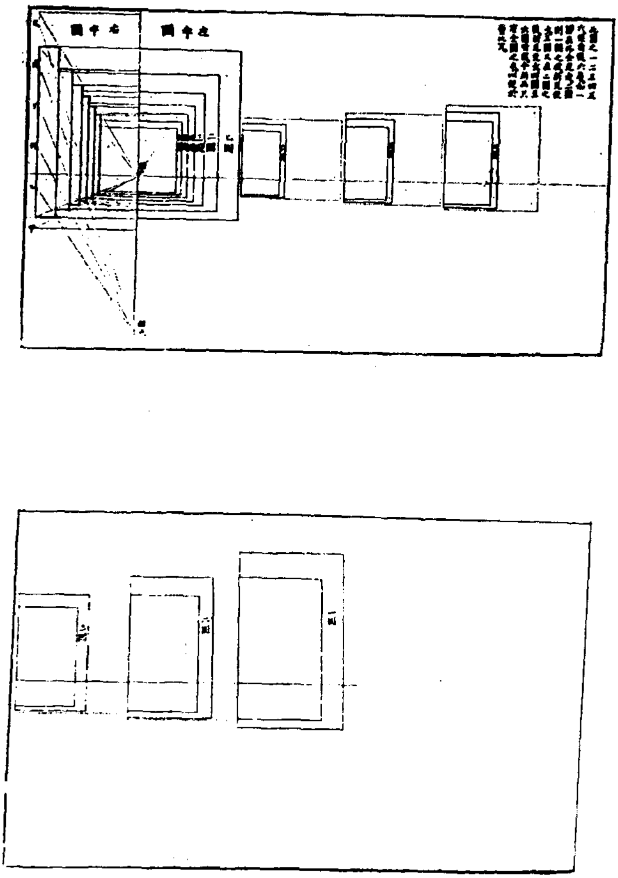


图 4.2.27

原著第815，816页(图4.2.27)前后安排六个层次，此图说明中介绍：

“此图之一、二、三、四、五、六系前后六层。如一图在外全见者，二图则一图之后，所见便少。三图又在二图之后，所见更少。四至六，皆然。今所画只有全图之半，以便于量比也。”

此指庑殿顶三开间牌坊建筑物，这里他作了定性叙述。然后又在第818页定量作图，以确定内部五个层次具体大小尺寸。原著说：

“此二、三、四、五、六图俱系一样人物。如二图之人物移至三图该小若干，移于四图该小若干。”(图4.2.28)

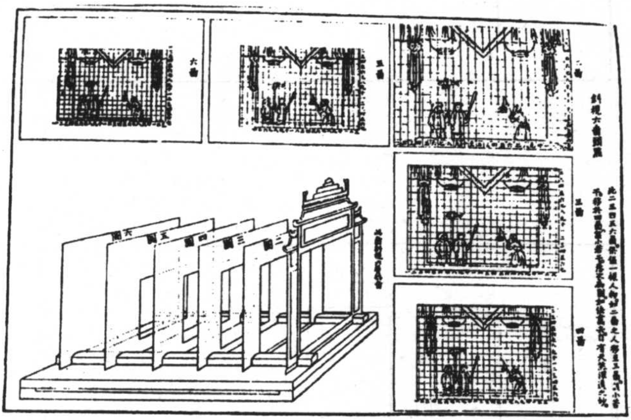


图4.2.28

这是说《视学》从纵横二方向分别作出各层次按比例缩小，然后把各层方格网内图样按同比例缩小。在第816页考虑到各层次上不同题材：宫灯、荷花灯、兔子灯，灯具不一，人物执扇、打伞、跑驴，姿态各异，庭园、月洞、远山、近树，景色也不同，煞是好看，是一幅出色的过节好年画。由于六层画面大小比例按照透视图画出，直观性非随意勾划可比，所以图中结尾说：“如法画

去，自有天然深远之妙。”（图 4.2.29）

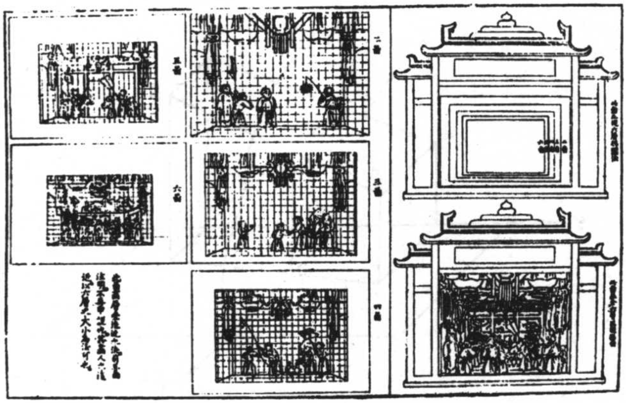


图 4.2.29

第 815，816 页原作上图左水平线为视平线，其上所写的头点即主点，也就是灭点，中心竖直线上的离点起到量点作用。

3. 截距法作图

我们知道，如果物空间是在第一卦限($x>0,y>0,z>0$)，视点 $S$ 在第四卦限($x>0,y<0,z>0$)，那么把 $XOZ$ 平面作为画面(图 4.2.30(1))，视点 $S$ 的正视图是 $S_1$，俯视图即站点 $S$，目标点 $A$ 的透视图 $a^\circ$，视线 $AS$ 的正视图是 $a_1S_1$，俯视图是 $aS$。二者在 $OX$，$OZ$ 轴上的交点分别是 $a^\circ_x$，$a^\circ_z$。易于看出，二者在坐标轴上的截距 $Oa^\circ_x$，$Oa^\circ_z$ 的量数就是 $a^\circ$在画面上的坐标。

设想把二视图坐标平面都摊平在画面 $XOZ$ 上，$a^\circ$的位置就可以由此二截距决定(图 4.2.30(2))。对这种画法，《视学》有重点介绍，并认为这种画法较量点法简便：

“较前法(量点法)简而易明……二法同一理也。此法只用一离点。”(第 794 页)

介绍这种作画法是从目标物在基面上的正方形 $ABCD$ 开始

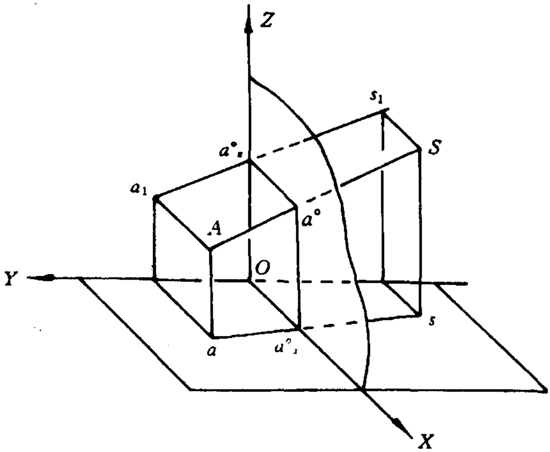



图 4.2.30 (1)

的，(图 4.2.31)[①] 其正视图为 $a_1b_1c_1d_1$，俯视图为 $abcd$。按照题给 $S$，$S_1$ 位置及其画面上透视图特征点的截距，见图自明地获得所求透视图 $a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ$。

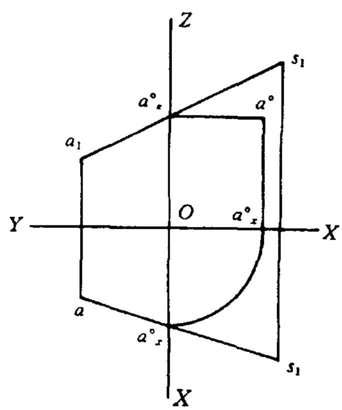



图 4.2.30 (2)

我们知道，视点 $S$ 与画面的不同相对位置会影响透视图的直观性及其作图难易。《视学》对视点位置的选择很是审慎，并有独到见解：

"此法只用一离点，全图可得。亦有上下同一离点者；亦有下层用

① 据《视学》第 796 页原图改画并改注拉丁字母。

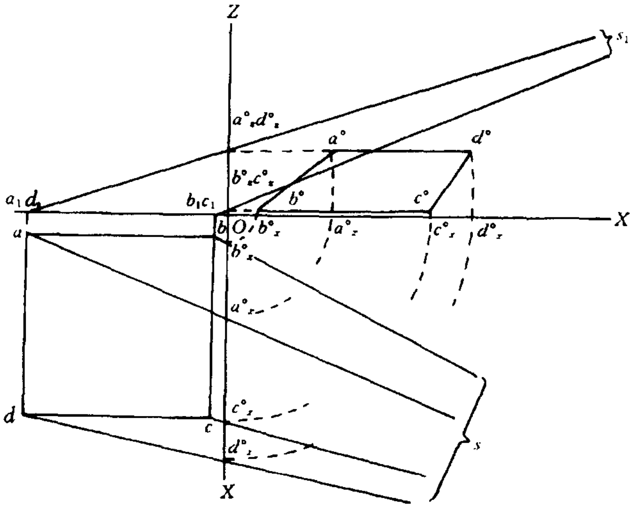



图 4.2.31

所设地平线上离点者，盖缘物之远近不一，务合眼根。在高明者酌而用之。”（第 794 页）

在《视学》众多的截距法图例中可分类为：

**方案一**　视点 $S$ 在第四卦限内（图 4.2.30）。

**方案二**　“亦有下层用所设地平线上离点者。”这是指视点 $S$ 在 $XOY$ 平面上（图 4.2.32），其二视图 $S$，$S_1$ 不重合，而前者在基线 $OX$ 上。

**方案三**　“亦有上下同一离点者。”是指视点 $S$ 在第三卦限（$x<0, y<0, z>0$）内，而使其在坐标平面上正投影坐标 $y$，$z$ 的绝对值相对，当二视图坐标平面摊平在画面上时，$S$，$S_1$ 重合为一点（图 4.2.33）。于是在作透视图时无须从两点作投射线，从 $S$，$S_1$ 重合点出发作放射线，可取得事半功倍的效果。

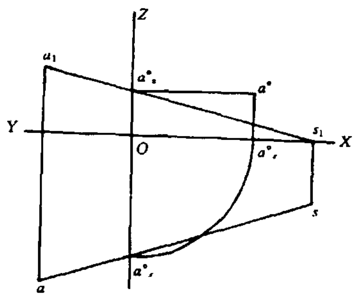



图 4.2.32

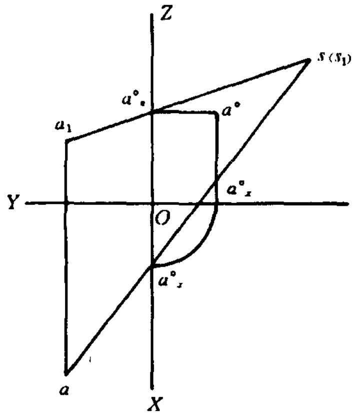



图 4.2.33

方案二和方案三都是一般截距作图法方案一的变通，其理由是显而易见的，特别是后者尤其简便，《视学》对方案三连举多例：都以图框右上角取为 $S$，$S_1$ 的重合点。

《视学》用截距法所作透视图俱极精美，在此列举一些。

**例题一**　图 4.2.31 为用方案一作成者，其 $S$，$S_1$ 分别取图框的右下、右上角。我们另附原著第 796 页图以为对照(图 4.2.34)。

**例题二**　图 4.2.35 为用方案二的例子，$S$，$S_1$ 分别取图框与基线交点以及右上角。原著第 794 页。

例题三至例题四都借助于方案三作出，四者都以图框右上角为 $S$，$S_1$ 重合点，作法简便，直观性也强。图样左侧上下分别为题给立体的正视图和俯视图。

**例题三**　图 4.2.36 画的是长方体(第 798 页)。

**例题四**　图 4.2.37 画的是两长方体组合的透视图(第 799 页)。

**例题五**　图 4.2.38 画的是在基面上的圆、十二等分后的透视

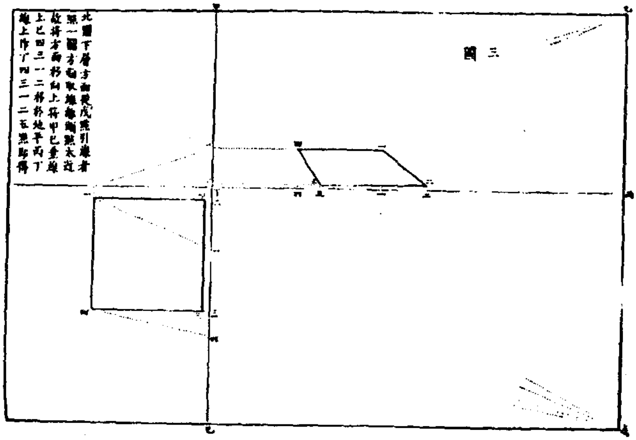


图 4.2.34

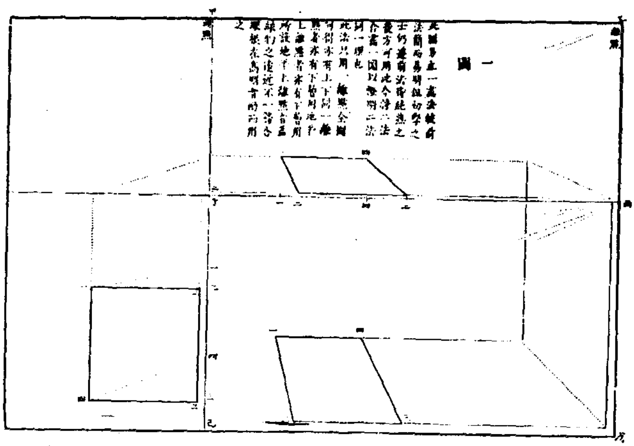


图 4.2.35

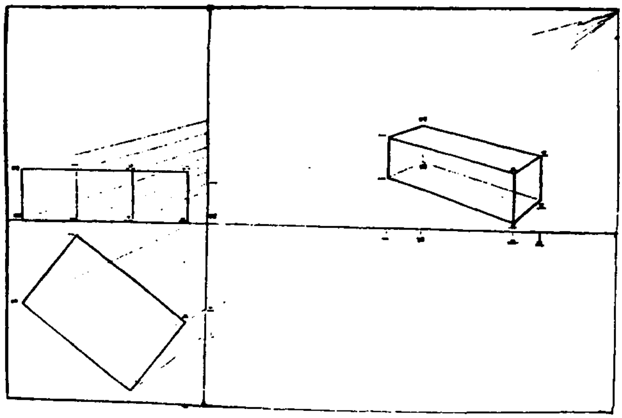


图 4.2.36

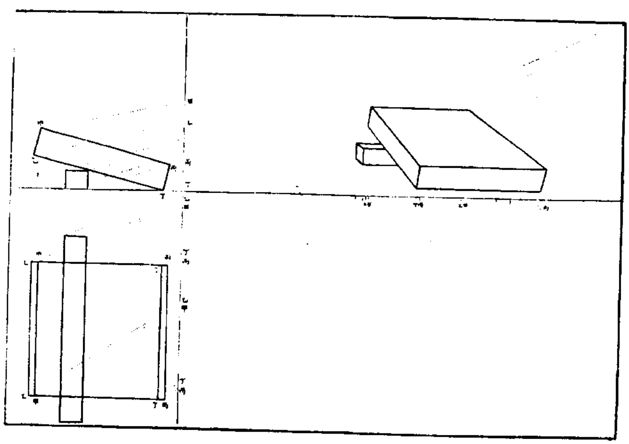


图 4.2.37

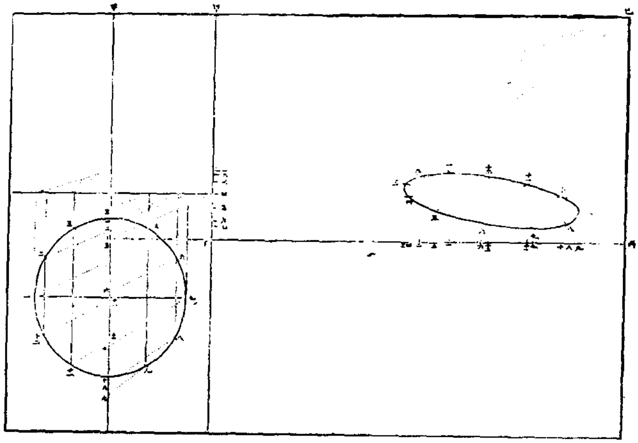


图 4.2.38

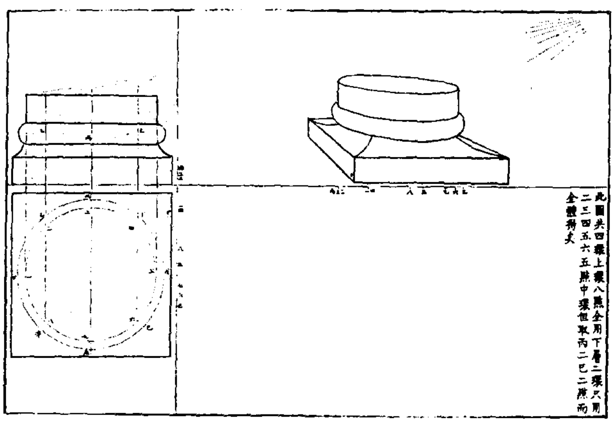



图 4.2.39

图(第 801 页)。

**例题六**　在例题五基础上,《视学》第 801 页又作出其他带在回转体的立体(柱础)的透视图(图 4.2.39)。

**方案四**　《视学》对仰望透视图《蛙视图》也设专题研究，空间想象能力特强，下面引述图、文：

“一图画层楼屋宇于蓬顶之上。视之宛若竖立深远。今绘此图，(图 4.2.40)以明定头点、离点之法。先设一方室，蓬顶如甲乙丙丁。迎面之墙如甲戊丙庚，左壁如甲戊乙巳。右壁如丙庚丁辛，地平如戊己庚辛，设有人站立于癸处，目在于壬。视蓬顶上之方图，如木生王工斜方式。欲画此图：先定一方体之正面，如未申酉戌体之底，如申土戌亥，从癸点作一斜线，与戊己线平行，至庚戊线上，得午点。从午点上行，任至天，次从壬点作一斜线，与午癸线平行，至天午线上，得子点，子点即与目之壬点相对，子壬之长，即目至墙相距之远，从子作平线于墙上，至丑点，子丑之长即子壬之长所谓离点也。再从壬点上行到蓬顶，仰视正对人之

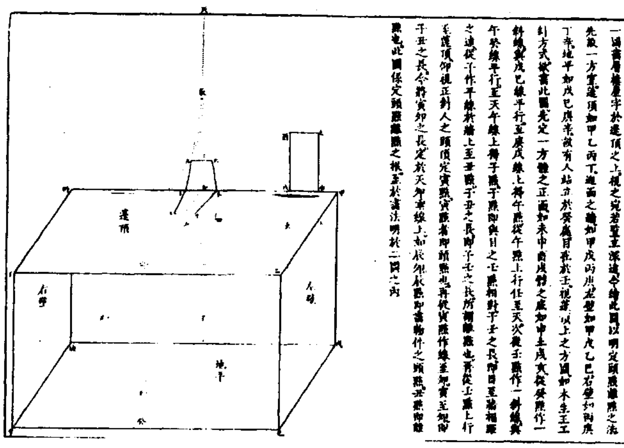


图 4.2.40

头顶，定寅点，寅点者，即头点也。再从寅点作线至卯。寅至卯即子丑之长。今将寅卯之长定于天卯垂线上，如辰卯。辰点即画物件之头点。丑点即离点也。此图系定头点、离点之根，至于画法明于二图之内。”（第809页）

对长方体仰视画法，《视学》还有定量论述：

“此图（图4.2.41）与前一图相同。今将远近尺寸略放大些，牵线易于明晓，今定前图子丑之长五尺，蓬顶之高六尺，定辰卯之长，以子丑线相等，旁另设一方体之面，如未申酉戌，高三尺，方底如申土戌亥，一尺七寸，今将未申酉戌之高定于蓬顶甲丙线上，从酉引平线至辰卯线上得一点，从壬引线至一点，与甲丙线相交于二，将二卯之长定与（于）辰卯线上，如三卯。将甲土戌亥之方底定于辰卯垂线下，如木四王五，从辰引线至木、至王。从三点引平线割断，即得六七木王方体之面也。再从辰引线至四、至五，从六七二角作垂线，与辰四线相交于癸，辰五线相交于壬，即得六七癸壬之顶也。另将申土戌亥之方底移于左，如庚辛丁戊，依法画之，即得庚丁牛女斜视之方体也。”（第810页）

以下用现代透视学语言作解释：如在第五卦限（$x>0,y>0,z<0$）内有一目标点$A$（图4.2.42(1)）。视点$S$在$YOZ$平面内，把$XOY$平面作为画面，主点是$S^\circ$。问题是在画面上求$A$点的透视图$a^\circ$。我们知道用截距法可以决定其位置，图中已示$A$的正视图、俯视图分别为$a_1$，$a$，按照画法几何惯例把二视图投影平面摊平到画面上，有关点线位置变换如图4.2.42(2)。于是$a^\circ$的位置可以如下作图：连结$S$，$a_1$，交横放的$OY$轴于$a^\circ_y$。以$O$为圆心，$a^\circ_yO$为半径作圆弧。又以$S^\circ O$为半径另作圆弧，二者在竖放的$OY$轴上截取$a^\circ_y$，$S^\circ$两点。过竖放的$OY$轴上的$a_y$引平行于线$OX$的直线，又连接$S^\circ$，$a$。二者交于$a^\circ$，这就是所求目标点$A$的透视图。

现选取《视学》中仰视图的例子。

**例题一**　（图4.2.43）（第811页）《视学》运用方案四作出方

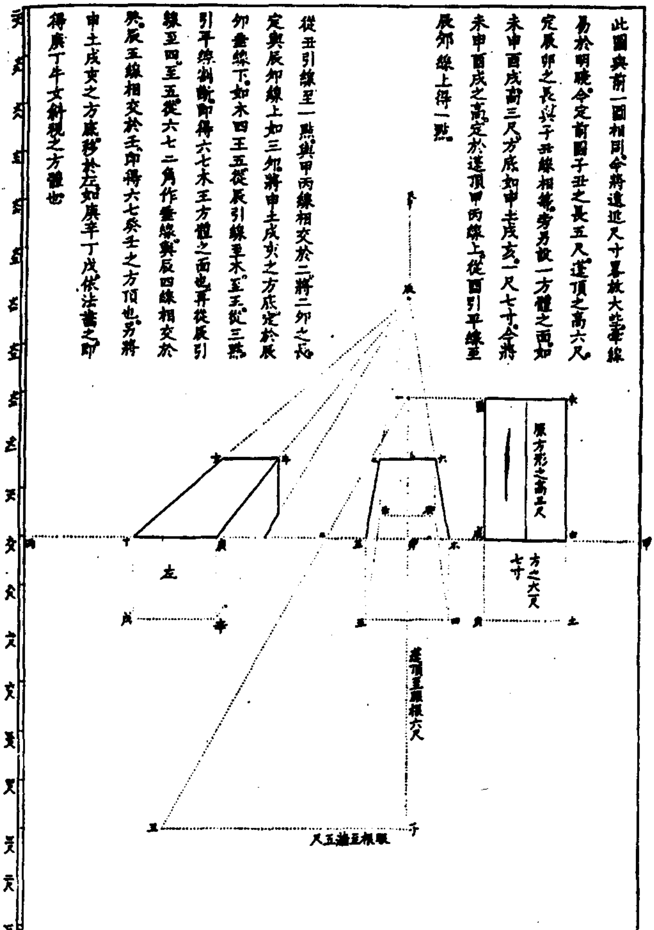

此圖與前一圖相同，今將遠近尺寸畧放大些，地平線
易於明曉。今定前圖子丑之長五尺，蓮頂之高六尺。
定辰卯之長與子丑線相等。旁另設一方體之面，如
未申酉戌高三尺，方底如申壬戌亥，一尺七寸。今將
未申酉戌之高，定於蓮頂甲丙線上，從酉引平線至
辰卯線上得一點。
從丑引線至一點，與甲丙線相交於二，將二卯之長
定與辰卯線上，如三卯。將申壬戌亥之方底定於辰
卯畫線下，如木四王五。從辰引線至木，至王，從三點
引平線斷，即得六七木王方體之面也。再從辰引
線至四，至五，從六七二角作垂線，與辰四線相交於
癸，辰五線相交於壬，即得六七癸壬之方頂也。另將
申壬戌亥之方底移於左，如庚辛丁戊，依法畫之，即
得庚丁牛女斜視之方體也
蓮頂至眼根六尺

图 4.2.41

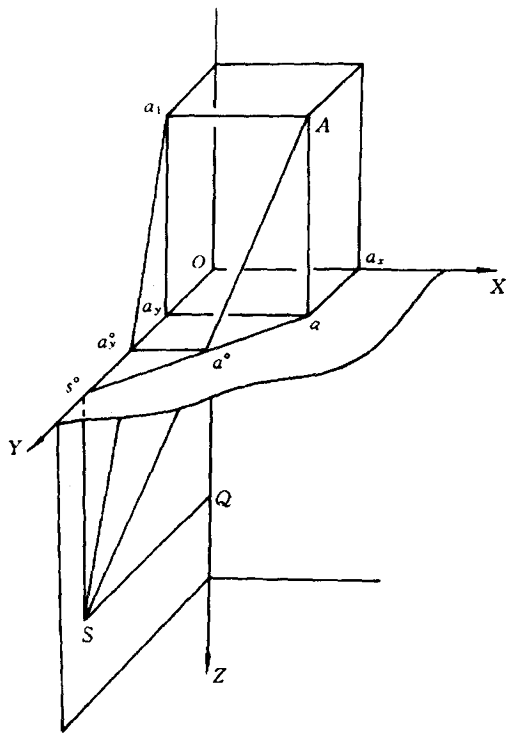



图 4.2.42 (1)

柱体的仰视图。下面改用现代记号并另作图。问题：已给方柱体 *ABCD-EFGH* 放置在第八卦限($x<0,y<0,z<0$)，这是物空间，使柱体前面、底面都与二视图坐标平面重合，视点 $S$ 在 $YOZ$ 平面内，把 $XOY$ 平面作为画面。《视学》对于方柱体上的特征点，如 $A$ 的透视图的作法相当于说："定 $Os'$ 之长与 $QS$ 等。从 $a_1$ 引平线至竖立的 $OY$ 轴得 $a^\circ{}_y$。从 $S$ 引线至 $a_y$ 与横放的 $OY$ 轴交于 $a^\circ{}_y$，将 $a^\circ{}_yO$ 之长定在竖立的 $OY$ 轴上得 $a^\circ{}_y$。再从 $s^\circ$ 引线至 $a$。从 $a^\circ{}_y$ 引平线割断，即得 $a^\circ$。" 显然年氏所论与今天的认识完全一致。再用同

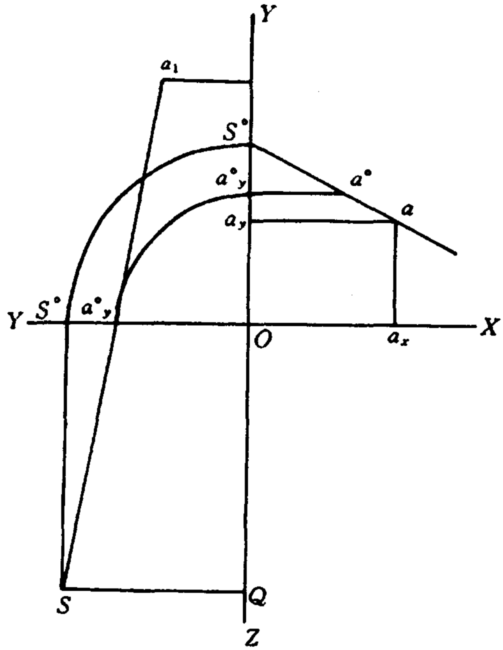
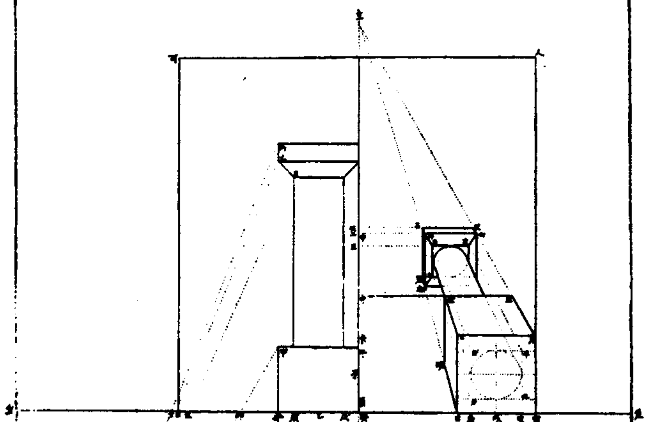



图 4.2.42 (2)

样的方法作出其他各特征点 $B$，$C$，$D$ 的透视图 $b^\circ$，$c^\circ$，$d^\circ$。而原来重合于画面的方柱体底部正方形四顶点的透视图就是它们自己。用适当线段连接这些透视点，所求透视图 $a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ$-$e^\circ f^\circ g^\circ h^\circ$已作成。

**例题二**　(图 4.2.44)当图形及视点与画面的相对位置一经确定，就可以按步就班地按照方案四作出它的仰视图。《视学》第 811 页就借以画带有柱冠的方柱仰视图。据以作图，则图中柱体正视图为 $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$，俯视图为 $fegh$，视点 $S$(二视图投影在画面上重合为一点 $S$)的位置也已确定。《视学》对此题作图法相当于说：



此圖畫方頂法取頭點離點與前三圖同主癸線即前圖之辰卯線。今於主癸線上先定中心如中點。申至癸尺寸取方。即得人寅可壬一方邊也。主癸線左設一柱。如丙巳丑甲。柱子垂線至虛室線上。如癸戊乙庚辛將癸戊乙庚辛移於寅角上成寅亥戌辰日五點。再將癸戊乙庚辛移於主癸線上。如未午子酉癸。從未午子酉癸引平線至人寅線上。將亥戌辰日作垂線上行。即得月寅土日柱子底盤定矣。再從柱上丙巳丑甲引四線至加離點與虛室線上相交得丁壬生卯四點。自癸量至丁壬生卯四點尺寸。移於主癸中垂線上。定天工王中四點。從主引線至月。至土。作二線。從天作平線得只石二點。從工作平線得山井二點。從中作平線得立世二點。從主引線至日作一線。從石作垂線得鬼點。從井作垂線得柳點。從世作垂線得明點。再從主引線至牛。至女。作二線。從王作平線得乃言二點。從主引線至力。從乃作垂線得大點。將言乃大連成一小方。即與底盤上牛女力化之方相同。牛女力化四方之中作一圓柱底。言乃大之方中亦作圓柱之頂。頂底二圓邊界作線。即成圓柱之式。餘點各連成線。則得斜式方柱矣。

图 4.2.43

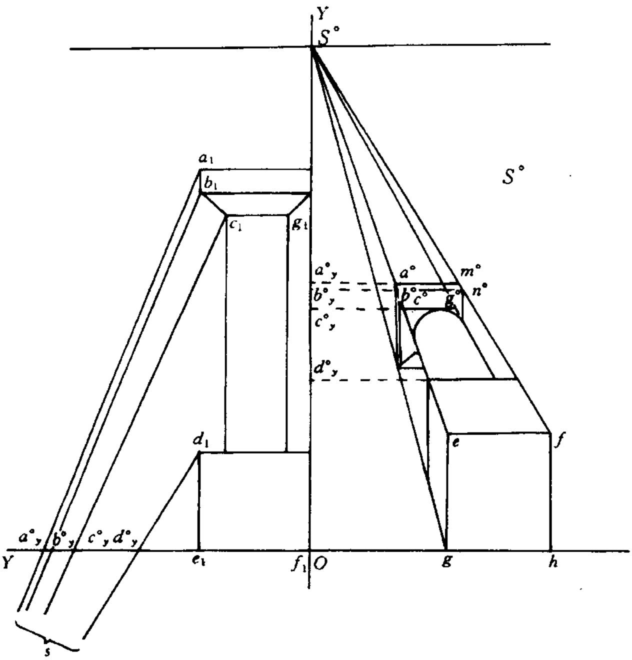
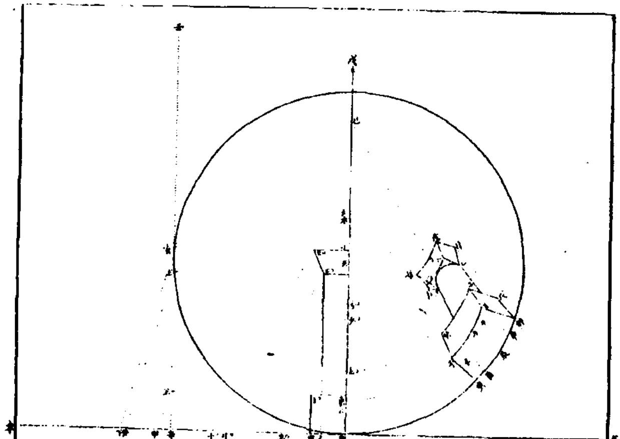



图 4.2.44

“以柱子 $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ 引四线至 $S$①，与横放的 $OY$ 轴交于 $a°_y$, $b°_y$, $c°_y$，$d°_y$ 四点，由 $O$ 量至四点尺寸，移至竖立的 $OY$ 轴上，定出相应的 $a°_y$，$b°_y$，$c°_y$，$d°_y$ 四点，又从 $S°$引线至 $e$，$f$，$g$，$h$，从 $a°_y$ 作平线得 $a°$，$m°$两点，从 $b°_y$ 作平线得 $b°$，$n°$两点，从 $c°_y$ 作平线，从 $d°_y$ 作平线相应得 $c°$，$g°$两点。”当得到足够多的特征点的透视图后，就“令点各连成线，即得斜式方柱矣”。

**例题三** （图 4.2.45)(第 812 页)《视学》还用同一方案进一步绘制有环缺形柱冠、柱础的圆柱透视图，引线简洁，说明文字

① 原图下半有近四百说明文字，在图框左边有一点，记有加字，即此 $S$ 点。



此圖係畫圓頂之法，頭點離點與前二圖相同。此圖之戊庚線，照前二圖之庚卯線一樣取法。今欲畫圓頂，先於戊庚線上任定一中心如天點，從天點開規至庚點作圓，切圓邊界作一垂線如壬辛，切圓之庚界作一平線如午未，從戊庚線左旁設一柱如士工王甲，從士工王三點引線至離點止，與午未線相交得乎牛生三點，再從柱上士工王三點引平線至壬辛線上，得女土王三點，供引線至離點止，與午未線相交得下井田三點。今將庚未線上下井田乎牛生庚七點移於戊庚線上，如大木小方少主庚七點，大木小天四點，乃畫圓頂各層中心之根，方少主三點乃定圓界柱石各層高之尺寸。從大點開規至方作一圓，取圖之六分之一得丁點，從木開規至少點作一圓，從小點開規至主點作一圓，將午未線上柱底甲乙庚尺寸移於戊庚線上，如東正庚，從天點開規至東點作一圓，天點乃本圓之心，均作六分之一，得丙點，從天引線過丙至圓界得辰點，將庚至甲尺寸定於丙東圓上，如子丑二點，從辰引線至子，至丑，從天開規至正點作一圓，與辰子辰丑二小斜線相交得午未二點，從丙點引線過丁點至戊庚線上得巳點，巳點乃仰視圓頂之正頭點也。從天引線過丑午丙未子等點，即得丑卯午車丙辰未酉子寅五線，連成柱石之底也。從巳引線至我至子，與方點圓相交得虛女，與主圓相交得癸亢，從巳引線至亢至寅作二線，從大點引線過虛過女與巳卯巳亥二線相交得日月二點，從小點引線過亥得戊點，從巳引線至午至未，作二線與少圓相交得八九二點，從巳引線至車至酉作二線，從木引線過八點九點得七點十點，取各點俱連成線，即成一柱，其餘柱做此法可也。

图 4.2.45

翔实。这样做，即使列入今日高等学校透视学教科书中也毫不逊色。为使读者亲尝原著的原汁原味，说明文字照录，而附图也按原著复制，天干地支等记号仍旧，在例题二基础上深信读者图文对照能领会原义：

“此图系画圆顶之法，头点、离点与前二图相同，此图之戊庚线照前二图之辰卯线一样取法，今欲画圆顶先于戊庚线上任定一中心，如天点，从天点开规[①]，至庚点作圆，切圆边界作一垂线如壬辛。切圆之庚界作一平线，如午未。从戊庚线左旁设一柱，如士工王甲，从士工王三点引线至离点申，与午未线相交，得干牛生三点。再从柱上士工王三点引平线至壬辛线上，得女土王三点，俱引线至离点申，与午未线相交，得下井田三点。今将庚未线上下井田干牛生庚七点移于戊庚线上，如大木小方少主庚七点。大木小天四点乃画圆顶各层中心之根，方少主三点乃定圆界柱石各层高之尺寸。

从大点开规至方作一圆，取圆之六分之一，得丁点。从木开规至少点，得一圆，从小点开规至主点作一圆。将午未线上柱底甲乙庚尺寸移于戊庚线上，如东正庚。从天点开规至东点作一圆，天点乃本圆之心，均作六分之一，得丙点。从天引线过丙至圆界得辰点，将庚至甲尺寸定于丙东圆上，如子丑二点。从辰引线至子、至丑。从天开规至正点作一圆，与辰子辰丑二小斜线相交，得午未二点。从丙点引线过丁点，至戊庚线上得巳点，巳点乃仰视圆顶之正头点也。从天引线过丑午丙未子等点，即得丑卯、午车、丙辰、未酉、子寅五线，连成柱石之底也。

从巳引线至丑、至子与方点圆相交，得虚女，与主圆相交，得癸亥。从巳引线至卯、至寅作二线，从大点引线过虚、过女与巳卯、巳亥二线相交得日月二点。从小点引线过亥点得戌点，从巳

① 意即以天点为心作圆。

引线至午、至未作二线，与少圆相交得八九二点，从巳引线至车、至酉作二线，从木引线过八点、九点，得七点、十点，取各点，俱连成线，即成一柱矣。余柱仿此法可也。”

**例题四**　(图 4.2.46)(第 813 页)对例题二、例题三分别清描总图，其直观效果诚如年希尧所说：

“此幅乃画成前二式之全图也。若按是法绘蓬顶，仰而视之，方圆合宜。柱石凌空，窗棂掩映，俨若层楼，岿然在上。其空隙处(指左图)如窥碧落、而见星辰矣。”

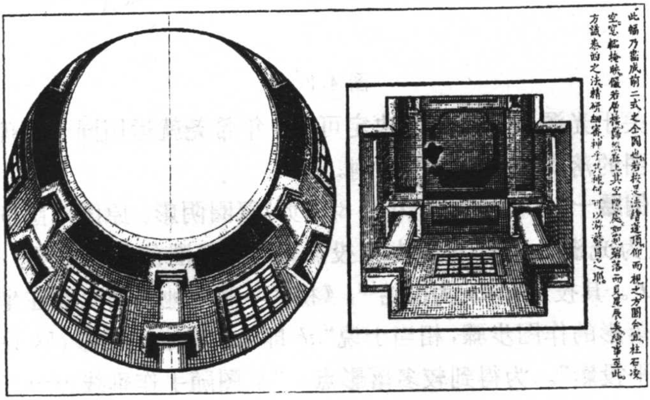



图 4.2.46

而且年希尧还提醒读者应注意画法几何在艺术欣赏以外的另一层重要意义，他说：“绘事至此，……神乎其神，何可以游艺目之耶?”

4. 阴影作法

《视学》对轴测图上的阴影画法也有专题研究。事实上，在轴测图上中心光源 $L$ 所发出射线可用 $L$ 本身位置及其在坐标平面上投影 $l$ 决定(图 4.2.47)。目标点 $A$ 在坐标平面上的落影 $a^{\circ}$ 乃是过此点的射线 $LA$ 及其在此坐标面上投影 $la$ 的交点。这就是说，当 $L$，$l$ 给定，目标物及其在坐标面上投影的轴测图为已给，则目

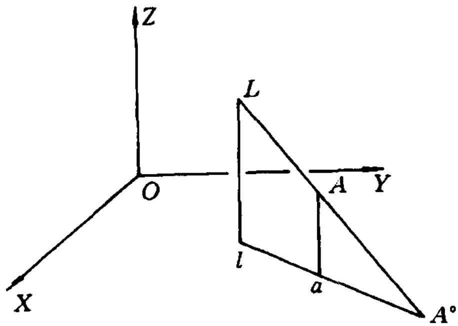



图 4.2.47

标物关于光源 $L$ 的落阴已决定可作。年希尧就运用同一原理作出轴测图的落阴，这里选引数例。

**例题一** (图 4.2.48)(第 851 页)双圈阴影。原图以图框右上角顶为光源 $L$，右下角为其投影 $l$。又双圈的轴测图是 $ABOHKO'$。其投影 $abkh$ 为已给[①]。《视学》明确地提出双圈在坐标平面上落影的作图步骤，相当于说“$ab$ 即 $AB$ 的水平投影，$hk$ 即 $HK$ 的水平投影”。为得到较多落影点，“从图随手作垂线……三个 $A$ 字($A$,$a$ 及落影点 $A°$)一垂线也(是指三点在同一竖直平面内)，三个 $B$ 字($B$,$b$ 及 $B°$)一垂线也……周而复始至 $A$ 止，即得 $AB$ 之圆影”。“二圈影相并(叠加)即有全体影也，余俱仿此。不拘方圆三角，是物之影悬挂者，俱可得矣。”

**例题二** (图 4.2.49)(第 850 页)直线在回转体上的落影。当光源及其投影为已给，回转体及其在坐标平面上投影的轴测图也已给。问题是求直线 $MN$ 在此回转体表面上的落影。《视学》对此作出详解。以图框右上角顶、右下角顶分别取作光源及其投影，然

① 用拉丁字母代替原图天干地支记法。

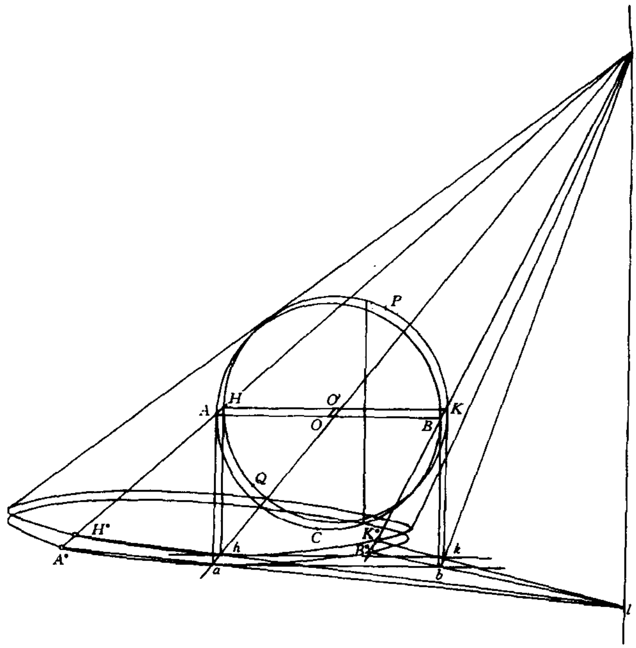



图 4.2.48

后

“先于瓶上画(水平层次)圆线,次将瓶上圆圈尺寸俱移于地平上,如$E$,$F$,$G$①等圈。从$l$引线过$N$而至$P$,$NP$线即$MN$边影,务从$NP$影上$E$,$F$,$G$等点,立垂线与众圈交(点)处则得$E^{\circ}$,$F^{\circ}$,$G^{\circ}$等点。连成虚线,则$MN$边影射于瓶上,毫发无错矣。”

**例题三** (图 4.2.50)(第855页)门洞落影。《视学》取光源及其投影为$L$,$l$,题中给出门洞及其投影的轴测图。在如此光源照射下,门洞落影,《视学》作法相当于说:从$L$引线过$B$至任设一点$C$,又从$l$引线过$J$至$E$,从$E$作垂线交$LC$于$F$,从$F$引水平

① 用拉丁字母代替原图天干地支记法。

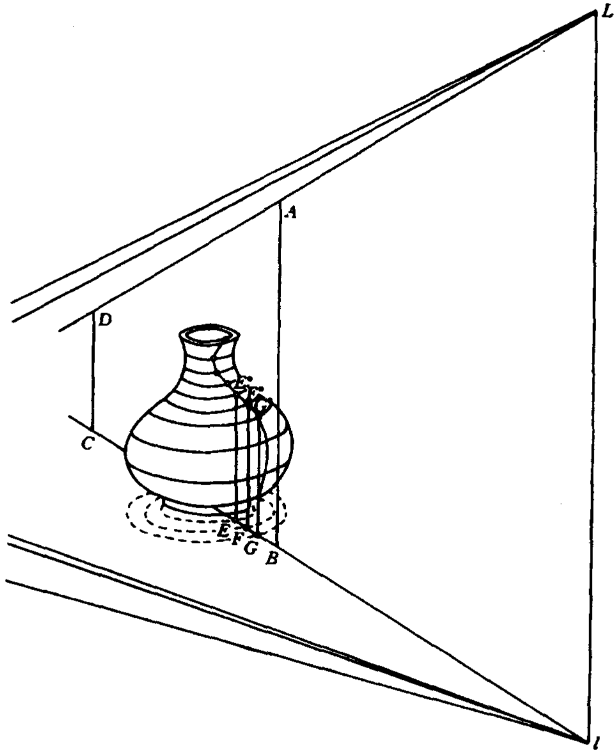



图 4.2.49

线交 $AL$ 线[①]于 $G$，作为圆心，将圆规展开至 $F$，作圆弧自 $F$ 至 $H$，则得 $BK$ 在门上的落影边界。

**例题四**　跄虎落影(图 4.2.51)(第 855 页)。

**例题五**　人影(图 4.2.52)(第 854 页)。

① $A$ 为门洞上部半圆圆心，$AB$ 为水平线。

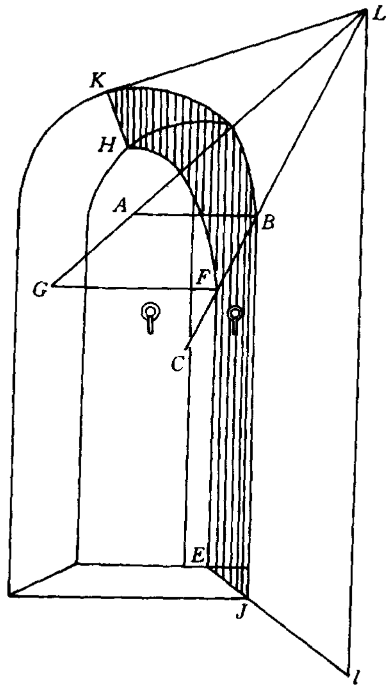



图 4.2.50

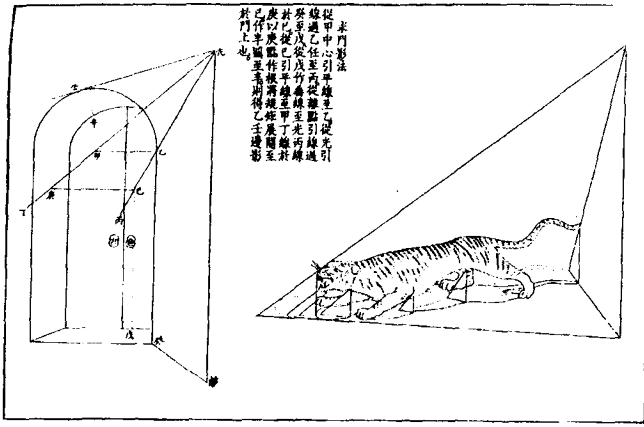

求門影法
從甲中心引平線至乙從光引
線過乙任至丙從離點引線過
癸至戊從戊作垂線至光丙線
於己從己引平線至甲丁線於
己作半圈至辛則得乙壬邊影
於門上也

图 4.2.51

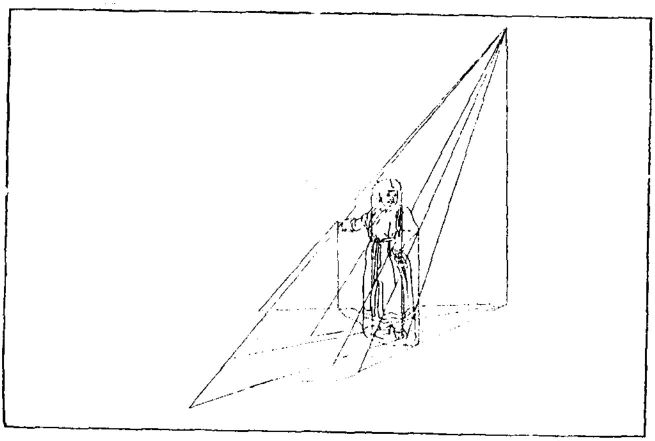


图 4.2.52

# 第三节 从《视学》看18世纪前后东西方画法几何知识的交融和影响

## 一、西来典藉

众所周知，明末利玛窦在宣教的同时，也介绍西方天文学、数学等科学。以后西方传教士竞相东来，自然科学知识相继内传。其中或多或少也牵涉到画法几何有关问题(有关流传经过已在第一编第一章详细论述)。《测量全义》在几何方面有五种正多面体的轴测图，未示作法，在球面三角方面详论球面三角形数值解法。所用插图有正投影，也有斜投影①。这些知识对梅文鼎画法几何工作提供了研究素材，这是不能置疑的。

对年希尧《视学》研究工作有巨大影响的西方学者首推前面提到的郎世宁。来华当年就晋谒康熙皇帝。1722年康熙逝世，雍正接位，国家政策改变，西方传教士全受厄运，惟独郎世宁破格仍得特殊礼遇。1736年王子乾隆登基后，几乎每天都到郎氏画室看作画②。乾隆一生大事，郎世宁都为一一选画，如狩猎、战事、受降、凯旋等先后入画，共200余幅。他还为皇家长春园西洋楼建筑群用透视图法画成油画，在西洋楼东侧展览。郎世宁的作画理论和技术对年希尧的影响是可以理解的。

《画家与建筑师用透视学》(Perspective Pictorus et Architectrum)系意大利人朴蜀(A. Pozzo，1642～1709)1693年所著。铜版精镂，当年郎世宁自意大利飘洋过海携带此书到北京。后长期藏北堂图书馆。赵擎寰曾借阅此书③，版面很大。因各种原因

① 四库全书．文澜阁本．台北：商务印书馆印本

② M. Reurdeley．画家郎世宁．读者文摘，1983 (3)

③ 在口头请教和通信中，赵擎寰多次告知他在50年代亲见此书。

后来不易看到，80 年代笔者得自由美国寄来纽约重版本[1]，马若安(Martzloff)从法国寄来修订本，始知朴蜀著书目的是为当时建筑界展示希腊柱式、罗马五范建筑艺术的巨型画册。书成后不久，在 18 世纪之初，经著名建筑师、数学家伦(C. Wren，1632～1723)推荐，由琼(J. Jone)译成英文以呈献英王安娜陛下鉴赏，朴蜀书以当时习惯画法即量点法作建筑物透视图，没有必要过细地探讨透视作图原理。所绘制对象除建筑物外别无他求。此书肯定是年希尧著《视学》的重要参考书。

## 二、制图工具、透视画法和入画题材

### 1. 制图工具

**中国**　富有立体感的轴测图是我国传统作画图法，各种轴测图三个主方向上都有一定比率(缩短系数)可循，变量性要求高，因此可据以施工。我国画工匠师称之为界画。在作图工具和方法上都有独特的创造。三种轴测图虽各有特点，但当三个主方向一经确定，作图主要问题(包括平行透视图)是作出为数众多的平行线。我国古代写字作画都用毛笔。针对毛笔作平行线问题，我国画工创造了专用工具。50 年代赵擎寰专访故宫博物院宫匠师金勋，那时他已 84 岁[2]，金勋当年承揽宫廷建筑木厂，绘制图样。他说，“旧日画图全用毛笔，作直线时，使毛笔靠定一支叫槽尺的直尺画线。”70 年代末期，笔者在杭州市园林管理局设计室看到作界画的工具——界尺和槽尺。这套工具是明代文物。而且这套工具还在古为今用，能胜任直线笔(西方)所不能做的工作，作出各种大型彩色园林美景为绿化和旅游业服务。

界尺由等长二直尺组成，用两条等长铜件连接，形成一平行

---

① 1971 年纽约 Benjamin Blom 出版社出版，文字部分并用拉丁文和英文。

② 赵擎寰. 中国古代工程制图发展初探，见：画法几何及制图科学论文选编. 1965

尺。当下尺方向确定后，用左手按住，改变铜杆与直尺间角度，上尺边就形成与下尺相平行的不同位置直线。槽尺是开有半圆槽的木杆。作图时用长锋狼毫细杆毛笔紧贴半圆槽壁，用右手握住，并调整笔锋露出槽口长度，以控制所作直线的粗细。再以槽口靠界尺的上尺边缘，自左而右画线，随上尺平移就可以作出所需的平行线。两种尺都用硬木制成，使平直不变形，并有较大自重，以便镇纸。这种用毛笔画直线的工具比直线笔优越的地方是：蓄墨水量多，毛细管作用力大，墨水流量均匀缓慢，可以画粗细线条。而且可以画长线条不必中途添注墨水。特别是在渗水的手工制纸上也可以从容作画。

**欧洲**　现从《视学》首叶[①]图(4.2.53)介绍作画文房用品：这是朴蜀《画家和建筑师用透视学》的复制品，是17世纪欧洲作图工具的真实写照。其中有图桌、图板、直尺、丁字尺(固定、活动二式，后者能起到中国界尺的作用)。两脚规(作圆用)、铅笔、羽毛笔(写字用)等。年希尧的同代人法国工程师皮雄(T. Bion，1652～1733)所著《数学仪器使用法》[②]书中所附图版中(图4.2.54)所记A，C为铅笔套管，B为两脚规，D为铅笔[③]，E为固定丁字尺，F为活动丁字尺，G为直尺，H为带附件的圆规(铅笔和墨水笔)，I为比例规，J为缩放仪，K，L为两种形式的平行尺，从两书可见西方当时常用制图工具。特别引人注意的是西方的平行尺和中国的界尺原理及形式完全一致，其间渊源关系值得进一步探索。

故宫博物院藏清朝内廷用制图仪器[④]，后来流入民间。经一再

---

① 《视学》通汇本第716页. 见：朴蜀所著书. 英文版插页. 纽约：1971

② 转引自：Bolyai J. 数学史. 林鹤一日译本. 148～149

③ 当时“铅”条放在金属套管，“铅”条是特种泥土制成。porte-crayon(法文)，意思是泥条挟。

④ 李迪，白尚恕. 故宫博物馆所藏科技文物概述. 中国科技史料，1981(1)：95～100

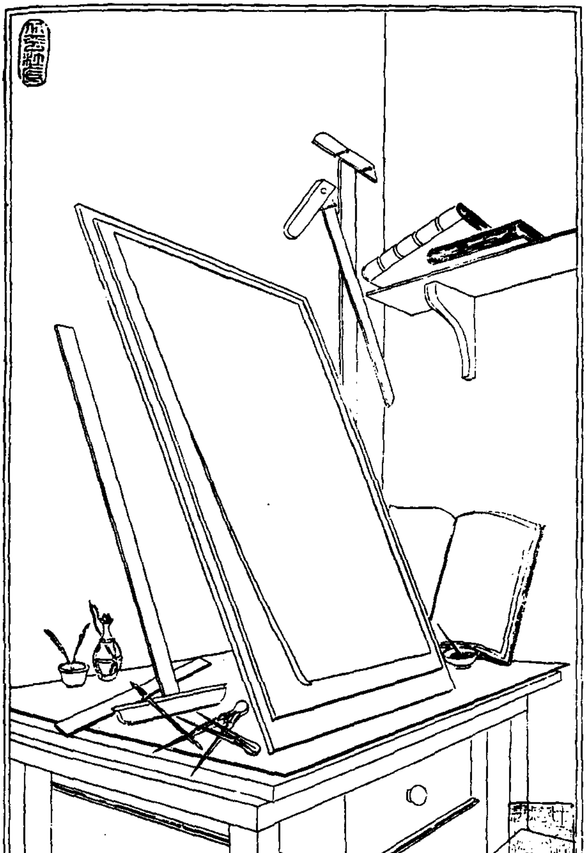


图 4.2.53

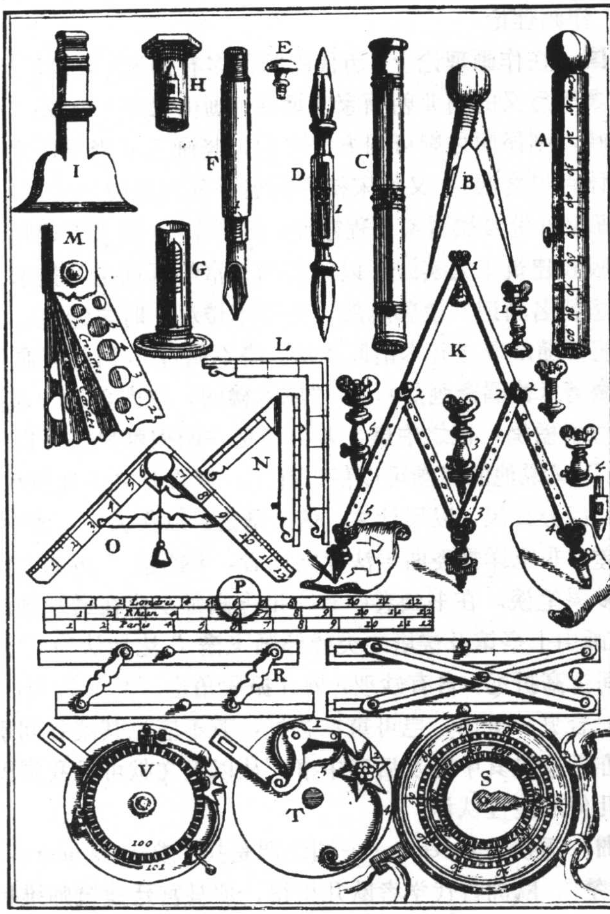



图 4.2.54

改进，保留有我国某些传统特色，传于后世。比较系统论述的书籍，以清时徐朝俊《高厚蒙求》(1807年)第三集为代表作。

2. 作画理论

**中国**　在作画理论上，历代画师代多有创见，可以汇为巨帙。其中有典型意义的南北朝画家宗炳在《画山水序》中说："今张绡素以远映，则昂阆之影可围方寸之内，竖画三寸当千仞之高，横画数尺体百里之回。"又如宋初界画名手郭忠恕(？～977)，号恕先，以画家身份参加国家工程建设，任将作监(国家工程师)之职。他善于吸收建筑工人实践，以充实和丰富绘画理论和技术。刘道醇著《圣朝名画记》说郭忠恕"为屋木楼观一时之绝也，上折下算，一艺百随咸取之砖木诸匠本法，略不相背"。所作界画质量很高，李廌著《德隅斋画品》说："屋木楼阁，恕先自为一家，最为独妙，栋梁楹桷，视之中虚，若可蹑足，阑楯牖户则可扪历而开阖之也。"又说他的界画可以借以施工：以百分之一比例尺，"以毫计寸，以分计尺，以尺计丈，倍而增之，以作大宇，皆中法度，曾无小差，非至详悉委曲于法变之内者，不能也。"再如北宋学者沈括《梦溪笔谈》在书画卷中有文批评画师李成在透视画法上的谬误："画山上亭馆及楼塔之类皆仰画飞檐。"沈括认为："由大观小，其间折高折远，自有妙理，皆在掀屋角也。"① 又认为："以下观上，只合见一重山，岂可重重悉见，兼不应见其溪谷间事，又如屋舍亦不应见其中庭及后巷中事。"从以上文献可见我国固有有关画法几何的定性认识。

**欧洲**　透视 perspective 一词语源是拉丁文 perspicere，义为"看得清楚"。欧洲古代学者欧几里得、罗马宫廷建筑师维特鲁威(Vitruive，公元前1世纪)、亚历山大城学者托勒玫等俱有有关论著。古希腊、罗马学者论著中也都从定性出发。例如欧几里得，人

---

① 仰画飞檐、掀屋角，都是指在俯视画中不应有仰视画图像。

称透视学的先驱，在他的专著《光学》一书中有 12 条公理。公理二说："视线构成锥面，以视者眼睛为顶点(视点)，以所见目标的周界为锥的底面。"《光学》列 61 条定理。例如定理二说："目标愈远，看起来愈小。"定理六说："平行线之间距离从远处看，并不相等。二者是在互相靠拢。"[①] 欧洲学术界在文艺复兴后才有定量研究，代表人物如达·芬奇(Da Vinci，1452～1519)、丢勒、乌巴迪(G. Ubaldi，17 世纪)、笛沙格(G. Desargues ，1591～1661)、蒙日(G. Monge，1746～1818)等人。

郎世宁及其带来中国的朴蜀《画家与建筑师用透视学》无疑给年希尧重要影响。在中国固有作画基础理论上年希尧吸取西方画法几何学说写成《视学》，可以说此书是东西方画法几何水乳交融的丰硕成果 。

3. 入画题材

在 150 多页大量插图中，《视学》交融中西事物，题材多样。

**柱式**　希腊建筑进入古风时期后，纪念性建筑物建材用石料代替木材。石建庙宇的艺术风格，各构件间的权衡比例，在此时期逐渐形成[②]，尤其是爱奥尼亚(Ionic)柱式和多立安(Doric)柱式已成为这一时期的重要特征，前者流行于西西里岛、意大利半岛南部，而后者在小亚西细一带流行。著名的古世界七奇之一的伊弗所斯(Ephesos)神庙是这时期最大的爱奥尼亚柱式庙宇，柱冠的涡卷很大，向两侧挑出很远，盾剑纹饰尤其饱满。属于希腊古典时期的建筑物上还出现过更为华丽的科林斯(Corinth)柱式，柱冠上忍冬花叶瓣茁壮蔓卷，层层勾画，后来又为罗马建筑继承发扬。罗马喀斯特和卜罗(Costor and Bollux)神庙檐柱就是典型例

---

① Heath T L. A History of Greek Mathematics (vol. 1). 441～444

② 陈志华. 外国建筑史. 北京：建筑工业出版社，1962

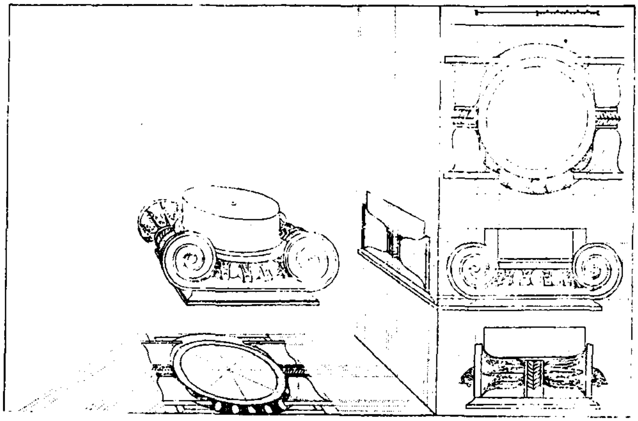


图 4.2.55

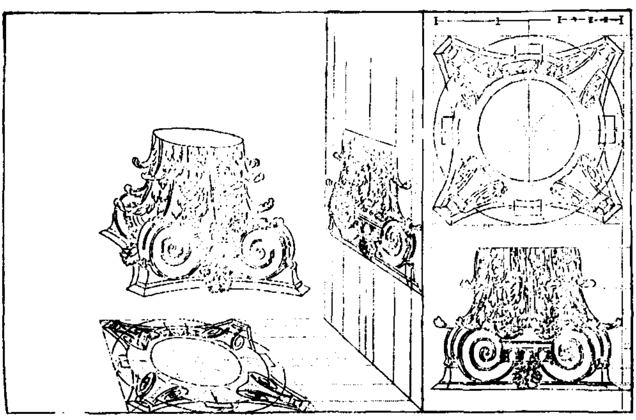


图 4.2.56

子，后来罗马人又改进为混合式：忍冬花叶瓣丛中烘托着耀眼的爱奥尼亚涡卷，使崇高富丽豪华的罗马建筑益加华美。罗马城为纪念皇帝狄托(Titus，在位 78～81 年)业绩的凯旋门门柱柱冠即为著例。作为《视学》量点法画透视图的最后画题，年希尧精细描绘这三种柱式(图 4.2.55～4.2.56)（《视学》第 738～740 页)。这是三种柱式首次介绍到中国。

叠柱是希腊古典时期出现的另一种建筑形式，作为古世纪七奇的另两座建筑物——奥林匹亚的宙斯(Zeus)庙和雅典的帕提侬(Parthenon)，主堂内都运用两排双层叠柱，以加重内院主神的中心地位，这种手法为后世建筑师广泛采用。《视学》介绍仰视法画透视图之后，对于希腊十字形空间和圆形空间叠柱(图 4.2.44～4.2.45)的仰视图，后来又清描点图，其透视效果特好(图 4.2.46)。如果说前三种柱冠是从朴蜀原著的临摹，那么后三图纯是年氏的创作。

**中国年画**　前面已在灭点(格网)画法中详为介绍。这一传统玩意，经《视学》科学分析，按理绘制，深远透视效果加强，自不待言，正如年希尧说："此西国画远房之法也……今作此图以明一法，学者可以推广其意。"

**其他器物**　《视学》还以透视画法画我国器物。用合乎中心投影画法来画实物，我国前所未闻，是开创性工作。书中体现中国风味：双耳六棱壶、有唇长颈瓶、三足香炉、六管笔插、宜兴茶壶等等。尽管画时难度较大，但作图精巧，施线有条不紊，交代清楚利索，从理论到技术，都已达到炉火纯青的境界。

**三、年希尧作《视学》的历史背景**

《清史稿》年羹尧传，附其兄希尧生涯："年希尧，字允恭，汉军镶黄旗人。"

众所周知，年羹尧是清初显赫人物。《清史稿》记其获罪，在

狱中自裁后，“兄希尧夺官，免其罪”。而“希尧初自笔帖式[①]，累擢工部侍郎[②]，既夺官，复起内务总管，命榷税淮安，加左都御史，十三年为江苏巡抚”。[③]“父遐龄，自笔帖式授兵部主事，再迁刑部郎中，四迁工部侍郎，出为湖广巡抚。”

又据《中国陶瓷史》[④]，雍正间有所谓年窑，那是指年希尧以管理淮安关税务之职，兼管景德镇御窑厂时的产品。《景德镇陶录》卷五称：“年窑，厂器也。管理淮安板闸关年希尧管镇厂窑务，选料奉造，极其精雅。”

从上面文献记载可见年氏写《视学》不是偶然的。可以认为，《视学》是中国传统画论的继续和发展，他在再版序中就说：“古人论绘事者有矣。曰：‘仰画飞檐’，又曰：‘得见溪谷中事’则其目力已上、下无定所矣，乌足以语学耶?”年氏所说古人即针对沈括所论作画的中肯评论。此外，年氏家族成员迭任封疆大吏，年氏自己长期从政，才能出入宫廷，获交郎世宁，得读秘籍，如朴蜀书。再者，工作需要和职业兴趣是促进写好《视学》的重要因素。希尧父亲曾出任工部侍郎，他自己任同职，还从事过陶瓷工艺管理业务，所以《视学》图例正反映其一生职业生涯，例如多次出现各式陶瓷制品图样和建筑物图样。

另一方面，郎世的影响对写好《视学》有着关键性意义。上文已谈到郎世宁历经康雍乾三代，与当局过从甚密，他在宫廷绘画的著名代表作是为皇家长春园西洋楼建筑 群用透视图法画成图样 20 幅，铜版镂刻，画面原大 0.64 米×1.10 米[⑤]。“透视”一词当时称为线法，如线法山、线法桥等。在西洋楼方河东侧建造

① 笔帖式，清代官名，系衙署中低级官员。

② 工部，掌管工程、工匠、屯田、水利、交通的中央权力机关。侍郎，官名。

③ 巡抚，清代地方长官，总揽军事、吏治大权。

④ 马先枢. 中国陶瓷史. 北京：文物出版社，1982

⑤ 王伯敏. 中国版画史. 1962. 36～37

南北向平行墙十堵，称“画线法墙”，今称画廊，展示郎世宁用透视法所作油画[1]。这些作画经验给予《视学》的影响是可以想象的，正如年希尧自己在《视学》再版序中称：“余曩岁即留心视学，率尝任智殚思，究未得其端绪，迨后获与泰西郎学士数相晤对，即能以西法作中土绘事。”

朴蜀《画师与建筑师用透视学》一书应是著《视学》时的重要参考用书。

## 第四节　梅、年二氏工作的重要学术意义

### 一、梅氏工作的现代评价

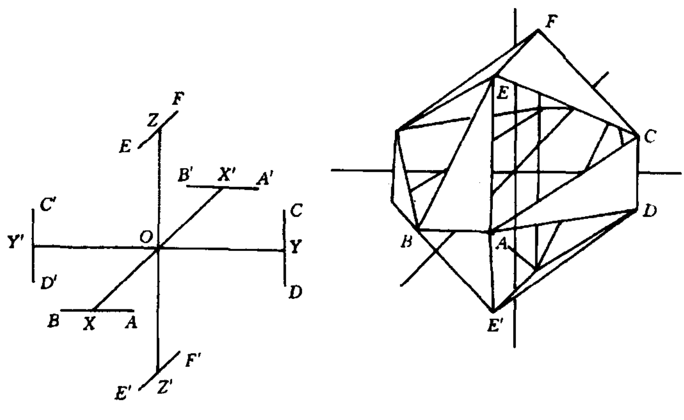
1. 正多面体

梅文鼎正多面体作图法立论正确、手续简便，直观性特强，是一项创作性工作。直到1937年，前苏联别列标尔金（Д. И. Берепёлкин）才在《数学教育》发表论文“正十二面体及正二十面体的一种作法”[2]。后来在他所著《初等几何教程》中又全文引用，成为高等师范院校数学系教材。他的作图方法为：“作三个两两垂直的相等线段$XX'$，$YY'$，$ZZ'$，同以$O$为中心，过$X$，$X'$各引直线$AB /\!/ A'B' /\!/ YY'$，并截取线段$XA=XB=X'A'=X'B'$。同样，过$Y$，$Y'$各引直线$CD /\!/ C'D' /\!/ ZZ'$，并截取$YC=YD=Y'C'=Y'D'=XA$。又过$Z$，$Z'$各引$ZE=ZF=Z'E'=Z'F'=XA$。将点$A$与$C$，$D$，$E$，$E'$连接，$A'$与$C$，$D$，$F$，$F'$连接……于是得一多面体。它是由十二个等腰三角形$ABE$，$ABE'$，$CDA$，…和八个正三角形$ACE$，$ADE'$，…组成。选择等长线段$XA=XB=X'A'=\cdots=Z'F'=x$，使等腰三角形成为正三角形（图4.2.57(1)）。设等长线

① 童寯．北京长春园西洋建筑·圆明园（第1辑）．1981．71～80

② 见 Математическое Просвещение，Выпу，12，1937

段$OX=OX'=\cdots=OZ'=m$，那么$AC^2=AY^2+YC^2=(OY-YA)^2+OX^2+YC^2$，这就是$AC^2=(m-x)^2+m^2+x^2$。而$CD=2x$。使$CA=CD$，得$\frac{m}{x}=\frac{x}{m-x}$。如果$XA=XB=\cdots$都等于按黄金分割所分$OX=OX'=\cdots$的较长部分，则所作的多面体由二十个正三角形组成(图4.2.57(2))。”



(1)　　　　(2)

图4.2.57

别列标尔金为梅文鼎的相同作法作了理论证明，但是他发表论文时已较《几何补编》晚近300年。

2. 球面三角形图解法

对球面三角形图解法，梅文鼎也作了开创性工作，正如他在自述发明经过时说：

“庚辰(1700年)中秋，鼎偶沾塞疾，诸务屏绝。展转床褥间，心闲无寄。秋光入户，秋夜弥长。平时测算之绪来我胸臆，积思

所通，引申触类……辄成小帙。俟同志之求耳。"[①]

球面三角的图解法在精度要求不高时，可以快速获得结果，可以可靠地以另一种方法校核计算结果的正确性。此外在教学中还可以为讲解有关公式起到良好直观作用。所以现代在球面三角学教科书中还采录这种方法，例如德国施米得等《球面三角学》[②] 中就重复了梅文鼎这一工作。有的学者对梅文鼎工作还作出进一步探索。例如，对问题四梅文鼎指出答案是近似的，误差将因地而殊。耐人寻味的是，德人格拉夫[③]著文提出用尺规作图法取得所求角顶 $A$ 的准确位置，解决了梅文鼎没有解决的疑问。格拉夫的作法是：考虑 $OA$ 是大圆 $CHF$，$BMK$ 的交线(半径)在 $OA$ 上任取一点 $P$。作 $PV/\!/BK$，$PY/\!/CF$。那么 $UV=XY$(图 4.2.58)，二者都表示 $P$ 点与投影面的距离(实长)。反过来，在$\triangle OHG$，

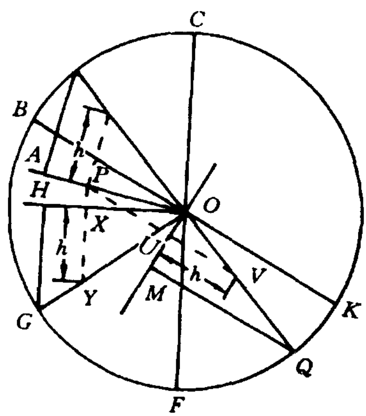



图 4.2.58

① 梅文鼎. 环中黍尺・小引

② Schmid W & Borsdorf W. Sphäriche Trigonometrie, Band 3, Pergamon, 1953.

③ Graf. Trigonometrie der Ebene, Sphäriche Geometrie and Kartentwurfe, 1938

$\triangle OMQ$ 中，以适当长度 $h$，取 $UV=XY=h$，而 $V$ 在 $OQ$ 上，$Y$ 在 $OG$ 上，且使 $UV /\!/ BK$，$XY /\!/ CF$，二者交于 $P$。它是距离平面为 $h$ 的点，这就不难(如图所示)得到所求点 $A$。再按照本编第二章第一节四问题二的步骤(2)求相应实长。

**二、《视学》是译作还是创作**

过去，对《视学》是译作还是创作，说法不一。原因之一是朴蜀的《画师与建筑师用透视学》原作由于各种原因不能看到。60年代，赵擎寰认为：

“此书内容半数以上取自1693年意大利人罗梭所作《建筑透视图》[①]……《建筑透视图》由意大利人郎世宁携来我国，1729年由年希尧节译，雕版印刷。书名《视学》，书中增入年希尧自己所作的一些图。”[②]

现在已能对照朴蜀原作。《视学》是译作还是创作，易于取得明确结论。按《通汇》本页码，《视学》共有108页(第711～818页)，经对照朴蜀原作有以下认识。

其一，《视学》前面30页部分内容确采自朴蜀原作重雕(木刻)，所施线条已不如原作精美[③]。下面列表表示两书对应关系：

| 《通汇》本页码 | 内　　容 | 朴蜀书页码 |
|---|---|---|
| 716 | 制图工具 | 插页 |
| 717～719 | 量点法作长方形透视图 | 2～4 |
| 720～727 | 方台与方柱 | 5～12 |
| 728 | 滑轮起吊建筑物另件 | 13 |
| 729 | 量点法作内切于正方形的同心圆 | 14 |

① Pozzo 音译应是朴蜀，其书名应是《画师与建筑师用透视学》。

② 赵擎寰．中国古代工程制图发展初探．见：画法几何及制图学论文选编．1965

③ 估计用中国传统方法薄纸影描，原作过细线条未画，木刻也无法胜过铜版。

续表

| 《通汇》本页码 | 内　　容 | 朴蜀书页码 |
|---|---|---|
| 730～737 | 圆柱与带柱础圆柱 | 17～22 |
| 738 | 爱奥尼亚柱冠 | 23 |
| 739～740 | 科林斯柱冠 | 24～25 |
| 741～743 | 方柱柱冠 | 26～28 |
| 744 | 方柱柱冠与科林斯柱冠组合 | 29 |
| 745 | 螺旋形柱 | 53B |

因此直接采自朴蜀书的共 30 页，仅占《视学》总页数的 19.48%。

其二，当采用朴蜀书的图样都照式影绘，虽细致已不如原作。由于中国传统习惯，译文忠实于原作，左右位置适与原著相反①。

其三，《视学》采自朴蜀书者，其图样说明文字按原作意译，但以天干地支或其他汉字字序法代替原作拉丁文字母。以《视学》正文第一页用量点法作正方形透视图为例(图 4.2.19)。朴蜀原作的说明是：

"Ante descriptionem opticam quadrati *A*, quod fingimus delineatum esse in papyro separetâ, ducenae sunt duae lineae parallelae; altera plani, altera horizontis, ut jam docuimus; notando in linea horizontis punctum oculi *O*, et punctum distaniae *E*. Tum translatâ in lineam plani latitadine ac longitudine ipsius quadrati *A*, ita ut linea *CB* sit aequalis latitudini, et *DC* sit aequalis latitudini, et *DC* sit aequalis langitudini. Ex punctis *B* et *C* sunt visuales *BO*, *CO* ad punctum oculi; ex pancto *D* sit recta

① 欧洲人左右方向，按读图者本身位置确定。我国传统左右则按图样(建物物业主)自身位置确定。例如北京故宫所称左祖(皇家祖庙、今劳动人民文化宫)右庙(社稷坛，今中山公园)，这与面对天安门者左右位置恰相反，西方以及今日中国习惯从后者。

*DE* ad punctum dislantiae . Demum ubi visualem *CO* secat recta *DE*，fit *GF* parallela ad *CB*；babesque quadratum opficè contractum.

Compendium temporis et laboris facies，praeserim in sebematibus que abundant lineis，si chartulam in medio complica van's，cademque utaris，ut latitudinem ac longitudnem quadrati transferas in lineam plani.”（1971 年纽约版第 2 页）

参考汉译：假设画在另一张纸上的正方形 *A* 要作透视图，应该作两条平行线：一为视平线，一为地平线，在视平线上作主点 *O*，量点 *E*，把正方形 *A* 的长和宽定在地平线上，即使线段 *CB* 等于宽，*DC* 等于长。从点 *B*，*C* 引视线 *BO*，*CO* 至主点 *O*。从点 *D* 引直线，*D* 至量点 *E*。最后，直线 *DE* 交视线 *CO*，又引 *GF* 平行于 *CB*。那么你已得到经光学变形的正方形，也就是它的透视图。

对照本章第二节第二部分“《视学》内容分析”中量点法作图一开始所引第 717 页原文(已改用现代记号代替天干地支记法)，可见年希尧的译作是忠于原著的。

其四，朴蜀书全用量点法作图，而《视学》兼用其他方法。

其五，朴蜀书是一部透视画大型画册，可供学术界已有透视画素养的学者名流参考和鉴赏，而《视学》是一部透视学作法和理论的研究用书，照顾到由浅入深等教学问题。朴蜀书作画囿于建筑物，而《视学》则于建筑之外兼及其他器皿、事物。

综合上述理由，两书大异小同，特别是翻译部分仅及《视学》五分之一。所以不能说是朴蜀书的节译本。总之，说《视学》为年希尧的创作是恰如其分的。

### 三、《视学》与西方学者同类专著的比较及其现代评价

欧洲文艺复兴时代由于绘画和建筑的需要，画法几何逐渐形成独立学科，也推动了古典几何的更新，为射影几何准备了发展基础。这里选介 15～19 世纪西方画法几何研究的代表人物及其主

要论述①。

**丢勒**　德国著名画家、雕刻家。他首创从立体在正交平面上的正投影图作出二视图(图 4.2.59 所示)。他作出：中心光源($L$，$l$ 分别是这光源的二视图)照射下立方体及其阴影的二视图(俯视图及正视图)，然后在画面 $XOZ$ 上作它们的透视图。假设 $OZ$ 是画面的投影，$s$ 和 $s_1$ 是主点和站点，二者分别与立方体及其阴影的特征点连接，如图中 $s_1a_1$，$s_1b_1$，…；$sa$，$sb$，…量取它们在 $OX$，$OZ$ 上的截距。从这些截距作出相应的特征点透视图，适当连结这些点就得到所求的透视图 $a^{\circ}b^{\circ}c^{\circ}d^{\circ}$…

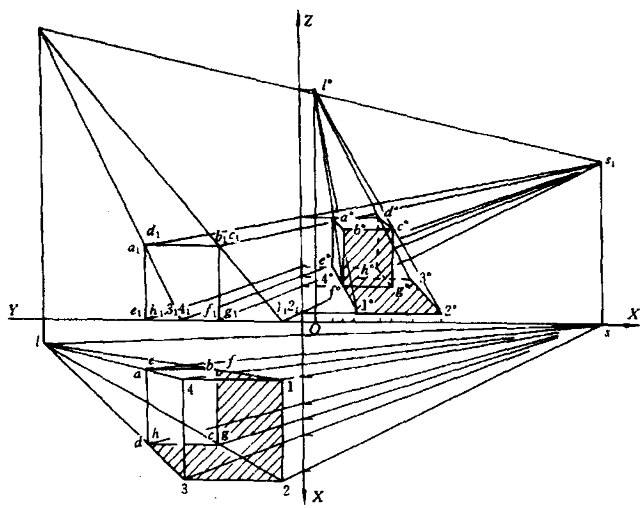



图 4.2.59

① 本段材料主要据法国波德拉《透视学史》(N. G. Poudra. Histoire de la Perspective. Paris, 1864)，全书586页，书后附图版12页。Martzloff 赠予 Reno' Taton 教授静电复制本，图版不清楚，笔者又自美国重新复制。

**费埃特**　(P. el Viator)身世不详。其《透视学》有好几种版本，初版于1505年，附图46页，1509年再版，减为29页，1521年三版，扩至30页，图4.2.60采自第三版。已给基线$OX$，视平线$hh$，立方体俯视图$abcd$及其高$d_1m_1$；又已给点$F$，量点$M$。原作取$OX$与$hh$距离为人目高度，$FM$为主点与量点距离。作法步骤：从俯视图上的$a$，$b$，$c$，$d$对基线引垂直线，从主点$F$连结这些垂足。以$d_1$为心，用圆规作象限圆弧，在基线上截取$d_1l_1=d_1c$，$d_1j_1=d_1d$。连接$l_1M$，$j_1M$。又连$a_1F$，$d_1F$，$l_1M$；$d_1F$，$j_1M$相应交于$h^\circ$，$g^\circ$，$e^\circ$，$f^\circ$。借此又截取各点透视高度，就得到所求的透视图$a^\circ b^\circ c^\circ d^\circ-e^\circ f^\circ g^\circ h^\circ$。(图4.2.60)

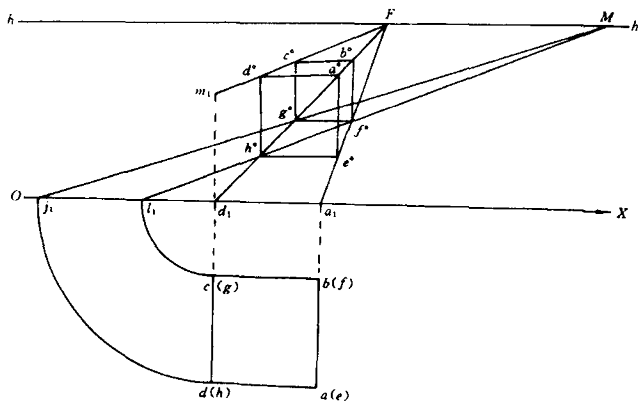



图 4.2.60

**鲁爱克**　(H. Leucker)系德国16世纪画家，他提出正方形$ABCD$(内含长方形$EFGH$)的透视图作法，借此可对基面上任一点作出透视图。他的作图步骤是：图4.2.61中已给基线$OX$，视平线$hh$，主点$s^\circ$，站点$s$。俯视图正方形$abcd$(内含长方形$efgh$)作$e$，$f$，$g$，$h$各顶点在基线上的垂足$i$，$j$，$k$，$l$，各与$s^\circ$连结。又分别作$e$，$f$，$g$，$h$到边$ab$，$cd$的垂足$m$，$n$，$p$，$q$。又分别以$a$，

$d$ 为圆心，把这些点截到基线上，得 $r$，$t$，$u$，$v$ 四点，也各自与 $s^{\circ}$相连。这些直线截相应的正方形对角线的透视图 $b^{\circ}d$，$c^{\circ}a$ 于 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ 四点①。过这些点引平行于基线的直线，与 $is^{\circ}$，$js^{\circ}$，$ks^{\circ}$，$ls^{\circ}$分别交于 $e^{\circ}$，$f^{\circ}$，$g^{\circ}$，$h^{\circ}$。四边形 $e^{\circ}f^{\circ}g^{\circ}h^{\circ}$就是所求的透视图。（图 4. 2. 61）

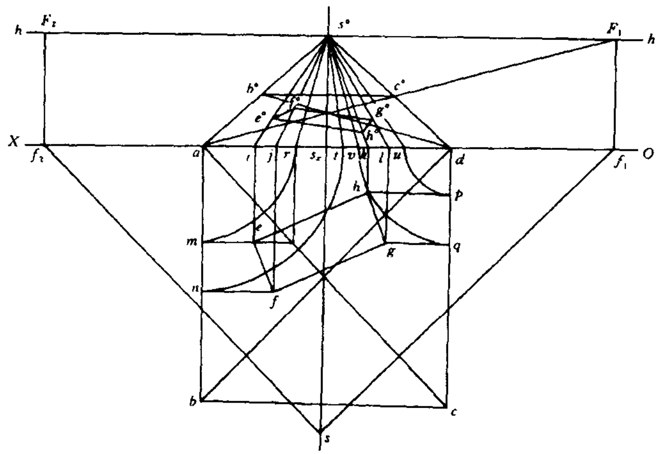



图 4. 2. 61

**巴卜罗**　(D. Barboro,1513～1570)他用意大利文著有《透视学实践》一书，记载他以前各种透视图作法，其中也含有他自己的创见。例如他对放置在正方形基面上任意位置的正方柱提出新的透视图作法，有别于丢勒，而在鲁爱克基础上有所创新。当基面绕基线旋转 90°后，正方柱的俯视图 $abcd$ 就摊平在画面上(图 4. 2. 62 在基线下侧)，在视平线 $hh$ 上截取 $nE$＝视距。

$Ea$ 与 $dn$ 交于 $m$。过 $m$ 引基线的平行线交 $as^{\circ}$，$ds^{\circ}$于 $b^{\circ}$，$c^{\circ}$两点。$adc^{\circ}b^{\circ}$就是正方形的透视图。然后他仿照鲁埃克方法作出基面

① 因图小，图中没有注出 $\alpha$，$\beta$，$\delta$，$\gamma$。

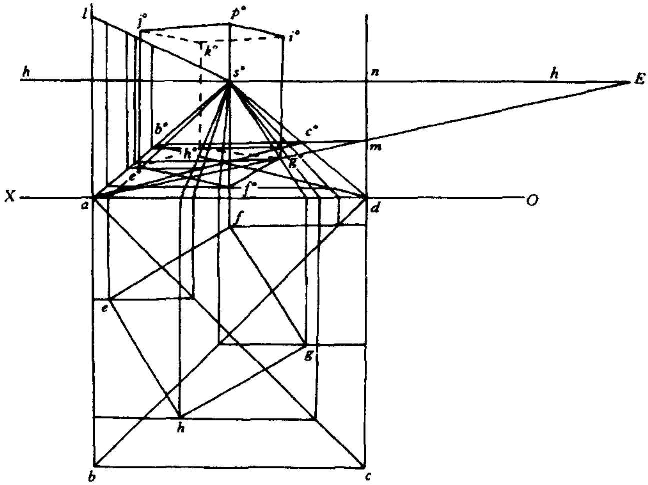



图 4.2.62

上正方柱底面的透视图 $e^\circ f^\circ g^\circ h^\circ$，他又以 $a$ 处方柱的实高 $al$ 为准，分别自 $s^\circ$ 量取在 $e^\circ$，$f^\circ$，$g^\circ$，$h^\circ$ 处的透视高。就这样得到所求透视图 $j^\circ k^\circ i^\circ p^\circ$-$e^\circ h^\circ g^\circ f^\circ$。

按巴卜罗求各点透视高度的作法实际就是现代透视学中的集中量线法，这是他首次给出的。关于从点 $m$ 决定 $bc$ 边透视图位置的方法也是前所未有之作。他取 $nE$＝视距（视距取正方形边 $ab$ 长）这一作法等价于把 $dm$ 作为画面在正投影面上的投影，$E$ 作为视点，因此 $dm$ 恰是 $bc$ 边的透视离开基线的距离。

**笛沙格**　(G. Desargues，1591～1661)系法国著名数学家，近世几何奠基人。他在前人成果基础上对立体透视图作法进一步系统化、定量化。他以基面、画面以及正视图投影面作为坐标平面。当在物空间的立体各特征点与过这三坐标平面的距离为已给时（坐标），也就是当立体的形状、大小、位置一经确定，就可以作出相应的透视图。他的原著有例说明作法。图 4.2.63 左图已给四

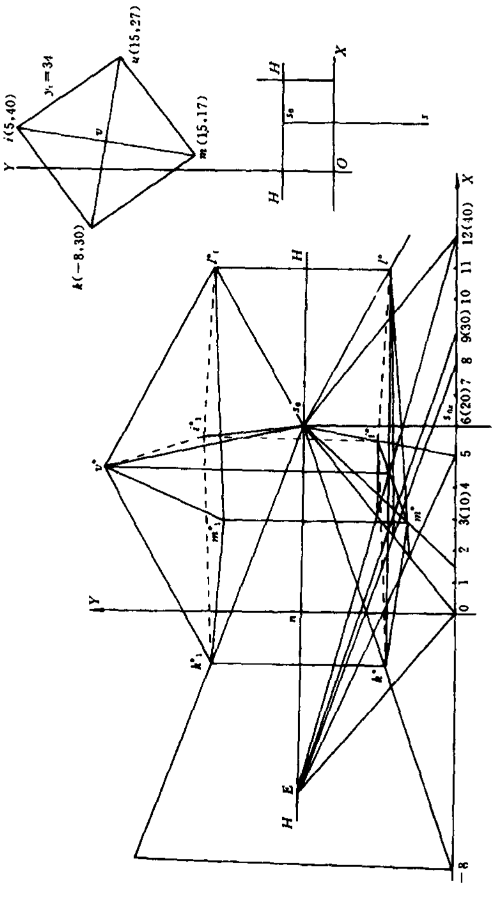

i(5,40)
u(15,27)
m(15,17)
k(−8,30)
$y_t=34$
Y
H
X
O
H
E
0 1 2 3(10) 4 5 6(20) 7 8 9(30) 10 11 12(40)
−8

图 4.2.63

拈尖房屋的俯视图。其中视平线 $hh$、基线 $OX$、主点 $s_\circ$、站点 $s$ 为已给。又此拈尖房屋四角及尖坐标也已给定。左图是透视图作法。他先作出基面上的坐标格点透视图以及与基线平行直线的透视图，其中 $En$ 为视距。笛沙格还以不同比例尺取其坐标轴 $OX$，$OY$ 上的长度。图中括弧外(内)数字分别表示 $OX(OY)$ 方向的坐标。从右图所给 $k, i, l, m$ 四点坐标，在画面上作相应的透视图 $k^\circ, i^\circ$，$l^\circ$，$m^\circ$。再按集中量线法作出房屋四角的透视图 $k^\circ_1$，$i^\circ_1$，$l^\circ_1$，$m^\circ_1$ 以及尖顶的透视图 $v^\circ$。图中已示所求房屋的透视图 $v^\circ k^\circ_1\ k^\circ \cdots m^\circ_1 m$。(图 4.2.63)

**朴蜀**　朴蜀《画师与建筑师用透视学》一书在 17 与 18 世纪之交饮誉欧洲学术界，情况已如上述。这一专著图例安排由浅入深，建筑物及其构件都用一视图表示，用量点法作出，形式多样，登堂入室，美仑美奂。可惜波德拉《透视学史》未作介绍。

**蒙日**　系法国数学家，画法几何奠基人，他的专著《画法几何》分 5 章共 131 节，1795 年初版。1820 年他的及门弟子勃依松(B. Brisson)补充老师未及发表过的论文“阴影论及透视学”(Thèorie des Ombres et de la Perspective)作为《画法几何》第四版的增订部分，全书篇幅增至 143 节。蒙日在此论文中提出从视图作立体透视图的一般图法及其理论。[①]

蒙日认为，透视图法是指视点位置给定，透视对象形状、尺寸和位置也已给定，要在画面上作出图样，其形状和位置一如人眼所见。假设这个画面是透明的，那么通过所设对象上一切点的视线与画面相交，其痕迹(交点)的全体就是所求透视对象的透视图。从纯粹几何学考虑，作透视图就是要描绘出透视对象每一个点在画面上正确的对应位置。作透视图也可以归结为求锥体某一

---

① Monge G. Geometrie Descriptive, Angmenter d'une Theon'e des Ombre et de la Perspective par B. Brisson. (vol. 2). 1922. 97～110 (本书有中文译本)

截面。这个锥体的顶点和底面是给定的，其中顶点是视点，锥底就是透视对象的基面，而所求截面就是锥体与画面的相交部分。蒙日又假设画面垂直于基面，作透视画就是要求穿过对象各点的视线锥在画面上的交点位置。蒙日认为作四棱锥的透视图是最简易的。他的作法如下(图 4.2.64)：

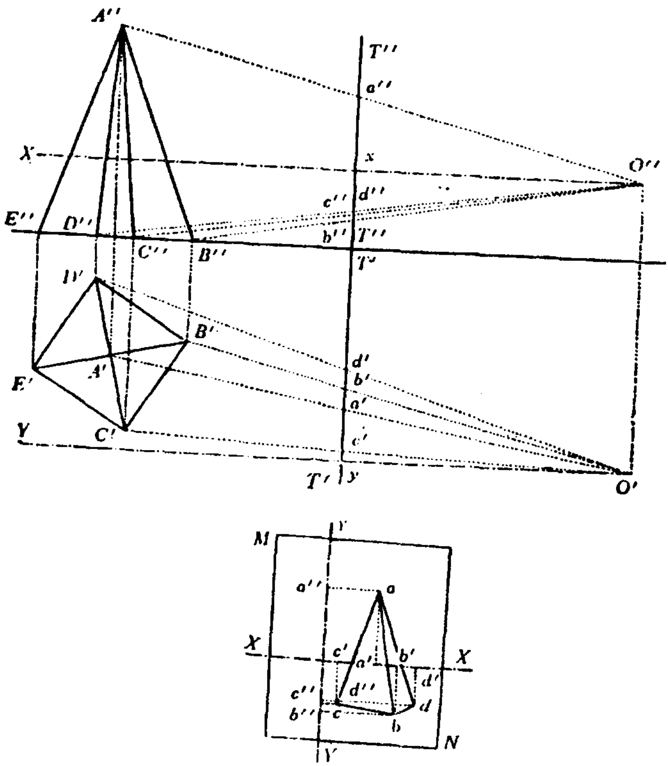


图 4.2.64

“先设互相垂直的投影平面，$O'$，$O''$分别是视点正投影和水平位置，$T'T'$，$T''T''$是画面投影，四棱锥的底及顶点 $A$，$B$，$C$，$D$，

$E$ 为已给，它们在水平投影面上的投影是 $A'$，$B'$，$C'$，$D'$，$E'$，在正立投影面上的投影是 $A''$，$B''$，$C''$，$D''$，$E''$。又假设过 $A$ 点的视线其水平投影和正投影分别是 $O'A'$，$O''A''$，与画面投影 $T'T'$，$T''T''$上的交点分别是 $a'$，$a''$。二者显然是视线与画面交点的水平投影和正投影。可以把 $T'T'$，$T''T''$上所记点的位置关系移到画面 $MN$ 上，比较简单的办法是在画面上作两条互相垂直的直线 $XX$，$YY$ 作为坐标轴，从点与二轴线间的距离易于确定视线与画面交点的位置。此二轴线可以灵活取用。假定从视点引二平面，一水平，一竖直，但二者都与画面垂直。二者在画面上的交线就取作 $XX$，$YY$。在先设的二视图上过视点的二平面正、俯视图分别是 $O''X$，$O'Y$，各是由视点的纵横坐标确定的；二者在 $T''T''$，$T'T'$ 上的交点分别是 $x$，$y$。$xa'$ 是过 $A$ 点的视线与画面交点的纵坐标，$ya''$是过 $A$ 点的视线与画面交点的横坐标。把这两个量移到画面上来，所求 $A$ 点在画面上的交点应该在 $aa'$ 上($aa' /\!/ XX$)，也应该在 $aa''$ 上($aa'' /\!/ YY$)。也就是说，所求点 $a$ 是 $aa'$ 和 $aa''$的交点，即 $A$ 点的透视图。用同样方法可作出四棱锥其他特征点 $B$，$C$，$D$，$E$ 的透视图 $b$，$c$，$d$，$e$。”

综合上引资料，可知从 15 世纪到 19 世纪 400 年间西方透视图作法成果，可以归纳为三类：其一为截距法，如丢勒和蒙日；其二为灭点法，如鲁爱克和笛沙格；其三为量点法，如费埃特、朴蜀。在他们的成果中还综合运用这些图法。

《视学》对这三种方法都有反映，并有发展和创新。

其一，截距法。《视学》广泛用截距法求直线形、圆(放在基面上)、多面体和曲面体(用二视图表示)的透视图。还进一步发展为画仰视图，作出方柱及组合体的直观图。这些图样的难度和变化多样都超过波德拉(N. G. Poudra，公元 19 世纪)《透视学史》所述各家成果以及蒙日所作四棱锥透视图(《画法几何》中仅此一孤例)，《视学》还创造视点在两个投影面上的投影合而为一的图法，

因此作图手续大为精简。

其二，灭点法。《视学》运用灭点法作平行透视。以有六个层次的平行透视图以加大作品的深远力度。《视学》也借助于集中量线法简化作图手续。

其三，量点法。《视学》以大量篇幅叙述量点法，从平面图形到多面体、球体，作法周到熟练，图例多，由浅人深，极便初学。

其四，阴影。关于中心光源下轴测图的阴影画法，丢勒已创导在前。《视学》结合中国器物多处继承发扬。

其五，成角投影。当实物与投影面位置倾斜时，年希尧能掌握变换规律(如图 4.2.25)，作图过程干净利索。这种成角投影、二视图旋转变换，至今仍是画法几何教程中的常见内容。

13 世纪以后，中国数学渐人低潮。西方数学传来中国后，知识界在画法几何领域内将中西结合并作出成果的，当以梅文鼎、年希尧两氏为最。《视学》是我国第一部论述透视学的专著，其出版时间早于蒙日《画法几何》60 多年。年氏治学严谨，为学循循善诱，选例精到，解题一丝不苟，正确不误。从上引各例图及说明文字很难想象这些细致图样是出于清初人之手。年氏工作成绩卓著，过去却鲜为人知。特别是波德拉《透视学史》是在《视学》出版后 100 多年成书。《视学》是否能流传海外? 波德拉是否能看到《视学》?《透视学史》只字未提《视学》的工作，是可以理解的。但是《视学》确是已传入西方的一部出色专著，与西方相应传世之作相比，并无逊色。我们认为年氏的成果应载人画法几何史册。

# 第三章 明安图的数学成就

明安图是蒙古族数学家，他长期从事天文历法工作，又曾两次受清政府派遣去新疆进行天文大地测量，临终时留下未完成的书稿《割圆密率捷法》，由学生和儿子补完成书。《割圆密率捷法》是一部高水平的数学著作，其中包括有重要成果，在中国数学史上属一流学术专著。本章将对明安图的生平和天文历法、大地测量，特别是对《割圆密率捷法》一书进行详细介绍。

## 第一节 明安图的天文与测绘工作

明安图，字静庵，蒙古正白旗人，蒙古族。历史上未留下关于他的生卒年记载，但根据有年代记载的活动来看，推测他应生于康熙三十一年(1692 年)前后，约卒于乾隆二十九年(1764 年)初，享年 70 余岁。他自幼被选为八旗官学生，学习一般文化，大约在康熙四十九年(1710 年)被选入国家的天文历法机构——钦天监，专门学习天文历法和数学，得到深造。当时康熙帝热心学习自然科学，尤其是数学。明安图受过康熙帝的指导，后来他的学生陈际新追述说："明静庵先生自童年亲受数学于圣祖仁皇帝，至老不衰。"[①]"圣祖"就是康熙帝的庙号，可能是由于明安图的学习成绩好，因而受到康熙帝的器重。

康熙帝于康熙五十一年(1712 年)四五月间去承德避暑山庄，有一大批随行人员，明安图为其中之一。据记载："康熙五十一年，

① 陈际新. 割圆密率捷法序

驾幸热河避暑山庄。征梅文鼎之子[①] 梅珏成诣行在。先是命苏州府教授陈厚耀，钦天监五官正何君锡之子何国柱、国宗，官学生明安图，原任钦天监监副成德，皆扈从侍直，上亲临提命，许其问难，如师弟子。”[②]在随行人员中，只有明安图是唯一一名官学生，当时尚未毕业。

明安图此次扈从回来之后，大约不久便毕业并留在钦天监工作，任五官正之职。五官正归时宪科，主要是研究历法和天象报告。第一项工作是每年由钦天监监正（最高职务）等署名上报第二年的历书式样，批准后向全国颁行。目前，在当时《时宪书》上见到明安图的名字的最早年份是康熙六十年（1721 年），这年冬十一月编成《大清康熙六十一年时宪书》，明安图署名及职衔是“食员外郎俸五官正明安图”。“员外郎”是一种虚衔，“食员外俸”就是享受员外郎那一级的待遇。相当于从五品秩级，比正六品高一些。在雍正七年（1729 年）的《时宪书》上明安图的职衔是“食员外郎俸加一级五官正”。从康熙六十年以来，明安图的这类署名差不多每年都出现。

乾隆四年二月二日（公元 1739 年 3 月 11 日），明安图与监正明图[③] 等“题为恭进（庚申年）《时宪书》式样事”，其中有这样一段话：“其满洲（满文的）、蒙古（蒙文的）《时宪术》亦照式样译写刊刻”，向朝廷进呈题本，明安图的署名为“食员外郎俸五官正加四级明安图”[④]，业绩又有了进步。当时的《时宪书》先用汉文编写，式样被批准后再照样译为满文和蒙文，向满族和蒙古族颁发。明安图曾被题名为翻译科进士，由此可知他可能要负责每年历书

---

① “之子”为“之孙”之误。

② 时宪志一．见：清史稿．卷四十五

③ 明图是满族天文学家，他是从灵台郎等低级职务一步步升到监正的。

④ 据北京故宫博物院明清档案部乾隆四年二月二日，钦天监题本。

的蒙文翻译。

明安图从事的第二项日常工作是和监正等一起联名向朝廷进呈关于日月食等特异天象的报告，例如雍正七年正月十七日(公元1729年2月14日)将要发生月食，一个月前明安图和监正明图等便根据计算结果再次向朝廷作了预报。预报说：

“钦天监监正臣明图等谨题为月食事：己酉年正月十七日壬戌望月食，京都月食十六分二十四秒。十七日丑正二刻十二分初亏，卯正二刻五分复原。其实限分秒时刻并并起复方位图象及各省月食初亏时刻先后不同诸数，己于本年八月二十九日题，九月初二日奉旨：‘知道了，礼部知道。’钦遵在案，今届期再行谨题。”[1]

这是本次月食的第二次预报，其内容包括北京地区此次月食的食分、初亏和复原时刻，而在第一次预报中还有北京地区所见月食图和外省的可见情况。乾隆四年七月二十二日(公元1739年8月26日)明安图又和监正进爱等共同进呈了“题为月食事”的题本，预报当年十二月十六日(公元1740年1月14日)的月食，其中有可见月食各省的月食图15幅，绘制得非常精美[2]。类似的例子很多，不再列举。

当时的钦天监官员，除履行日常工作职责外，还有不少重要的科研项目要被临时抽调参加，甚至领导。像明安图这样的科学家是多次在被抽调之列的。他的第一项此类工作是参加《律历渊源》的编撰，因为他刚毕业，所以负责“考测”，工作是在户外进行天象观测。在工作人员的名单中有“食员外郎俸五官正臣明安图”，排在考测的第五位，后面还有[3]。

---

① 据北京故宫博物院明清档案部雍正六年十二月十八日钦天监题本。

② 据北京故宫博物院明清档案部乾隆四年七月二十二日钦天监题本。

③ 见《律历渊源·奏议》。

明安图等的考测工作是在北京西郊的畅春园[①] 里进行，保留下几个测量结果。例如，康熙五十四年二月十六日(公元 1715 年 3 月 23 日)测得午正太阳高度五十度零三十二秒三十五微[②]。同年五月二十九日(公元 1715 年 7 月 13 日)，即夏至后第八日，测得午正太阳高度七十三度一十六分零二十三微[③]。康熙五十五年二月二十七日(公元 1716 年 3 月 19 日)测得午正太阳高度四十九度五十四分四十九秒五十一微[④]。

所谓"午正太阳高度"是指中午观测点与太阳的连线和地平线所成之角(如图 4.3.1)。这种工作要求严格、细致，时间性很强，同一观测点同一日内只能测一次，不能重复进行。但是考测工作绝不限于测太阳午正高度。通过考测可以确定某年的"二分"、"二至"，又通过"累年夏至午正太阳高度"得到了更精确的黄赤交角值。明安图在其中做出了自己的贡献。

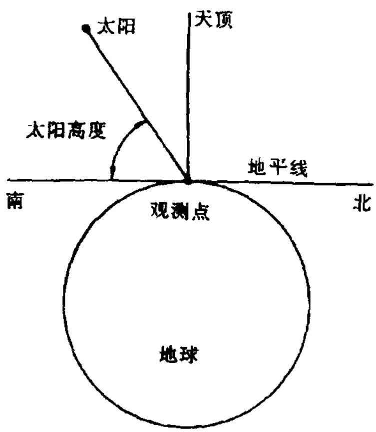



图 4.3.1　午正太阳高度示意图

可是，花费 10 年功夫编出的《律历渊源》不到十年，便在实践中出现误差，于是钦天监提出修改其天文部分《历象考成》的建议。建议说：《历象考成》"推算时宪七政，觉有微差。盖《考成》按西法算书[⑤] 算定，而其法用也已久，是以日月行度差之微芒，渐成分秒，若不修理，恐

① 畅春园是清代早期重要的学术活动地点，位于今北京大学西墙外的路西。

②③④ 见《律历渊源》之一的《历象考成》上编卷四。

⑤ "西洋算书"可能是指《西洋新法历书》。

愈久愈差”。且书中“图与表不合，而解多隐晦难晓”[1]。钦天监于雍正八年(1730 年)呈请清政府编制《日躔表》和《月离表》，并建议由西洋人戴进贤(I. K ögler，1680～1746)和徐懋德(A. Pereira，1690～1743)[2] 负责“挑选熟练人员，详加校定修理”。不久，由戴进贤把表编出来，但是这个表没有多少人能看明白，中国只有明安图一人。乾隆二年(1737 年)在一份给皇帝的“奏议”中提到了这件事：“查此表的作者系监正加礼部侍郎衔、西洋人戴进贤，能用此表者惟监副西洋人徐懋德与食员外郎俸五官正明安图。此三人外，别无解者。”[3] 可见明安图的天文学和数学水平，在当时的钦天监中是最高的。

由于这份表很多人看不懂，因而提出修改的建议。钦天监决定重新编一部书，同时推荐了参加工作的主要研究人员名单：“可否令戴进贤为总裁，以徐懋德、明安图为副总裁，令其尽心考验，增补图说，务期可垂永久。”[4]很快得到批准，于是从乾隆二年五月(1737 年 5 月)开始工作，后来又加入何国宗、梅瑴成等，共同进行研究、编撰，到乾隆七年(1742 年)完成，是为《历象考成后编》。明安图为编此书的学术主力，他和戴进贤、何国宗、徐懋德、梅瑴成等在书的署名上均以“汇编”名义出现(图 4.3.2)，也就是真正做学术工作的，而总裁改称“总理”，由行政官员担任。

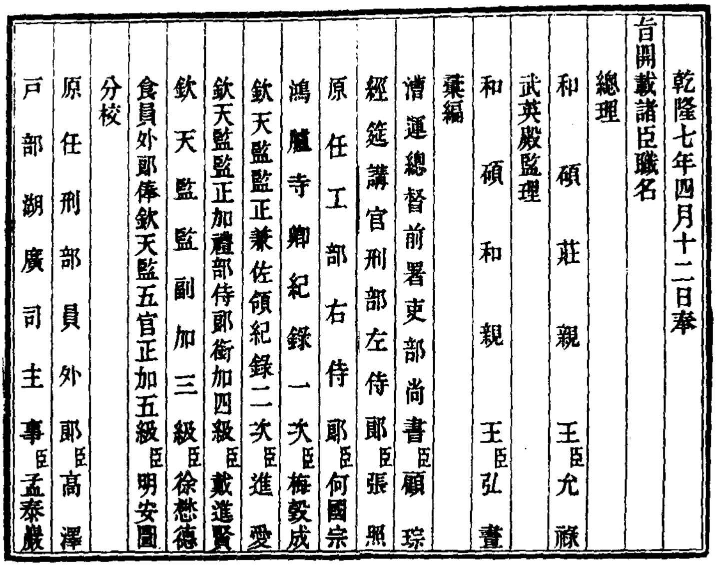
此项工作完成一年之后的乾隆九年(1744 年)，钦天监又开始编修《仪象考成》一书，到乾隆十七年(1752 年)冬完成，共 32 卷。书的内容除有一部分讲天文仪器外，大量的篇幅为天文表，先进行恒星观测，同时又要依据旧天文表用岁差予以校算。计算工作十分繁重。而这项繁重的校算任务即由明安图负责。

---

① 象纬一. 见：清朝文献通考. 卷二五八

② 戴进贤为德国人，1712 年到达北京。徐懋德为葡萄牙人，约于 1724 年入京。

③④ 见《增修历象考成后编》的顾琮奏议。


乾隆七年四月十二日奉
旨開載諸臣職名

總理
和碩莊親王臣允祿
武英殿監理
和碩和親王臣弘晝

彙編
漕運總督前署吏部尚書臣顧琮
經筵講官刑部左侍郎臣張照
原任工部右侍郎臣何國宗
鴻臚寺卿紀錄一次臣梅瑴成
欽天監監正兼佐領紀錄二次臣進愛
欽天監監正加禮部侍郎銜加四級臣戴進賢
欽天監監副加三級臣徐懋德
食員外郎俸欽天監五官正加五級臣明安圖
分校
原任刑部員外郎臣高澤
戶部湖廣司主事臣孟泰嚴

图 4.3.2　《历象考成后编》书影

临时性的天文研究项目总共就这三项，明安图都参加了，而且是重要成员。

接着是更艰苦的天文大地测量工作。原来康熙年曾在全国进行过，而新疆哈密以西的广大地区未进行。因为那里有叛乱，到乾隆二十年(1755 年)逐渐平定，决定派测量队进行测量。决定是这年做出的，三月有下面的谕旨：

“癸卯，谕大学士等，西师报捷，噶勒藏多尔济抒诚内附，西陲诸部，相率来归，愿入版图。其日出入、昼夜、节气时刻，宜载入《时宪书》，颁赐正朔，以昭远裔向化之盛。侍郎何国宗，素谙测量，著加尚书衔，带同五官正明安图、司务那海，前往各处，测其北极高度，东西偏度，绘图呈览。所有《坤舆全图》，及应需

仪器，由何国宗酌量带往。”①

同年六月，对上述决定又略有变化，主要有两点：一是内容增加了“其山川道里，应详细载入《皇舆全图》，二是由副都统富德代替司务那海，又“带西洋人二名”②。

根据这些记载可知，此次去新疆测量主要有两个目的：第一个是补充《时宪书》，即把哈密以西的新疆一些地方的二十四节气、太阳出入时刻等列入历书内；第二个是补绘《皇舆全图》的新疆部分。为此要进行四项具体工作：(1)测量各地点的经纬度(“北极高度，东西偏度”)；(2)测量方向和两点间的距离；(3)测量各地点昼夜长短和二十四节气日出入时刻；(4)对于各地的风土、地形等进行采访和调查。这些具体工作由一个测量队无法完成，如二十四节气时刻就不能在同一时间内测量东西两个地点。

明安图是被乾隆帝指名的专业测量人员。两名西洋人为法国的蒋友仁(M. Benoist，1715～1774)和葡萄牙的高慎思(J. D'Easpinha，1723～1788)。

测量队的出发时间是第二年的二三月间。他们到达哈密西北的巴里坤分为南北两路进行，明安图在哪路不见记载，由于何国宗负责南路，明安图则应在北路，两名西洋人也应分在南北两路。约在下一年的正月，测量队回到了北京。

这次测量的结果收入乾隆二十二年(1757 年)编的第二年的《时宪书》中。共有 20 个地点的北极高度和东西偏度，现列表于下(表 4.3.1)。

---

① 清高宗实录．卷四八五

② 象纬一．见：清朝文献通考．卷二五六

**表 4.3.1　伊犁等处地方北极高度与东西偏度表**[①]

| 测量点 | 北极高度 | 东西偏度 | 加减分 |
|---|---|---|---|
| 巴里坤 | 43°39′00″ | 西 23°00′00″ | $-1^h32^m00^s$ |
| 哈布塔克 | 45°00′00″ | 西 24°26′00″ | $-1^h37^m44^s$ |
| 拜达克 | 44°43′00″ | 西 25°00′00″ | $-1^h40^m00^s$ |
| 穆　垒 | 43°45′00″ | 西 25°36′00″ | $-1^h47^m24^s$ |
| 鲁克沁 | 42°48′00″ | 西 26°11′00″ | $-1^h44^m44^s$ |
| 吐鲁番 | 43°04′00″ | 西 26°45′00″ | $-1^h47^m00^s$ |
| 吉木萨 | 43°40′00″ | 西 26°52′00″ | $-1^h47^m28^s$ |
| 乌鲁木齐 | 43°27′00″ | 西 27°56′00″ | $-1^h51^m44^s$ |
| 乌沙克塔勒 | 42°16′00″ | 西 28°26′00″ | $-1^h53^m44^s$ |
| 哈喇沙尔 | 42°07′00″ | 西 29°17′00″ | $-1^h57^m08^s$ |
| 库尔勒 | 41°46′00″ | 西 29°56′00″ | $-1^h59^m44^s$ |
| 塔尔巴克台 | 47°00′00″ | 西 30°00′00″ | $-2^h00^m00^s$ |
| 珠尔都斯 | 43°17′00″ | 西 30°50′00″ | $-2^h03^m00^s$ |
| 安济海 | 44°13′00″ | 西 30°54′00″ | $-2^h03^m36^s$ |
| 空吉斯 | 43°33′00″ | 西 32°00′00″ | $-2^h08^m00^s$ |
| 哈什 | 44°08′00″ | 西 33°00′00″ | $-2^h12^m00^s$ |
| 齐尔上尔扈特 | 45°30′00″ | 西 33°00′00″ | $-2^h12^m00^s$ |
| 博罗塔拉 | 44°50′00″ | 西 33°30′00″ | $-2^h14^m00^s$ |
| 伊犁 | 43°56′00″ | 西 34°20′00″ | $-2^h19^m20^s$ |
| 哈萨克 | 47°30′00″ | 西 34°50′00″ | $-2^h19^m20^s$ |

在这里需要作点说明：北极高度相当于地理的北纬度，东西

① 此表采自陈际新的《北极高度表》，收入《陈氏六书》。这里改为现代形式造表。

偏度与地理经度相同。但是当时中国把过天安门正中的子午线定为基准，相当于现代的本初子午线，往西为西偏度，往东为东偏度，表中的“西”字是指西偏。“加减分”是指测量点与北京的时间差，用“－”号表示比北京晚到。如乌鲁木齐的加减分为“$-1^h51^m44^s$”表示比北京晚1时51分44秒，假定北京为中午12点，则乌鲁木齐为$12^h00^m00^s-1^h51^m44^s=10^h08^m16^s$，即上午10点多点。

这次测量由于南疆还不稳定，所以未达南疆。到乾隆二十三年(1758年)下半年，整个新疆呈现平稳状态，第二年初进入和平时期，于是乾隆帝第二次派测量队去新疆，完成从他祖父康熙帝以来的未竟之业。

乾隆二十四年(1759年)“五月庚辰朔，明安图、傅作霖绘回部舆图”①。这次测量的领队人是明安图，而不是何国宗。由于明安图的水平、资历和工作需要，在出发前他被提升为监正。测量队的成员傅作霖(F. da Rocha，1713～1781)是葡萄牙教士，1737年进入北京，后在钦天监任监副和监正②。还有一位外国人，就是第一次参加的高慎思③。此外，随队的二等侍卫什长乌林泰和乾清门行走蓝翎侍卫德保④，无疑是负责后勤保障和安全的。

第二次对新疆的测量是第一次的继续，目的、任务和方法都和第一次一样，但范围要大得多。据记载：

“按天山南路，惟辟展属，归隶版籍，自哈拉沙尔以西迄于叶

① 见《东华录·乾隆四十九》。

② 见《耶稣会士傅公墓志铭》。

③ 见《耶稣会士高公墓志铭》。

④ 徐松．新疆赋并序．1824

尔羌、和阗[①]，新疆内附诸境，命使测量，一如准部[②]。诸回部咸有城郭可凭，各就治所起数，尤称准的云。”

“按北极高度，(东西)偏度分，及昼夜时刻，午正日景，皆就新疆各属地形高下，测量而得，非如古分野之说，托诸空虚也。”[③]

明安图率队在南疆的广大地区，对28个地点(其中有两对是在同一地方，实测的结果为26个)的北极高度、东西偏度进行了测量，并调正了“加减分”。

测量队于乾隆二十五年(1760年)的三四月间回到了北京，明安图从五月起又开始履行自已的日常职务[④]。

在乾隆二十六年(1761年)的《时宪书》上收入了上述28个地点的测量结果[⑤]，而山川道里等的有关资料则交给了军机处，用于补绘《皇舆全图》的新疆部分。

乾隆二十七年(1762年)秋，明安图又随驾去热河，正好遇上日食，向乾隆帝解释了所出现的一些问题。

当时，明安图以监正的身份带头签署上报题本，有时一个月二三次，但是从乾隆二十八年十一月(1763年12月)起突然不见他的名字，而由福顺代替了[⑥]。估计此时明安图“病革”，第二年(1764年)去世。明安图至少有3个儿子，但只有第三个留下名字，叫明新，字景臻，在钦天监当天文生。

---

① 和阗即今新疆南部之和田。

② 当时的新疆地区大体以天山山脉为界，以北为准葛尔部(简称“准部”)，以南为回部。

③ 晷度二．见：钦定皇舆西域图志．卷一

④ 该年五月初一开始有明安图署名的题本。

⑤ 因篇幅关系，这里不再列表，其形式与表4.3.1一样。

⑥ 例如，十一月十八日(12月22日)，钦天监的题本上无明安图，其位置上改为福顺。

明安图在钦天监工作了50年，始终勤勤肯肯，直到去世，在天文历法和天文大地测量等方面做出了应有的贡献。

## 第二节 明安图的数学著作及成就

明安图不仅在钦天监工作尽心尽责，取得成就，而且业余研究数学，也成为中国清代最卓越的数学家之一。

实际上，明安图的日常和临时性工作，不论是天文历法，还是测量都离不开数学，其数学才能在当时便得到承认。实际上，他从青少年时代起就对数学有浓厚兴趣，“至老不衰”。

明安图对数学的研究是从西方传进来的三个无穷级数开始的。当时在钦天监工作的有不少西方来华教士，他们当中有精通数学者，如前面提到的徐懋德、杜德美等都是。杜德美传进的三个无穷级数已被梅珏成译载于其《赤水遗珍》中(见本书本编第一章第三节)，明安图不但知道这三个无穷级数，而且更重要的是进行了深入研究。他认为：

“圆径求周、弧背求弦、求矢三法，本泰西杜氏德美所著，实古今未有也。亟欲公诸同志，惜仅有其法，而未详其义，恐人有金针不度之疑。”①

就是说杜德美所传进的仅是结果，而没有证明，人们对它们的意义不了解。

明安图是什么时候接触这三个无穷级数的，没有文献记载，但说是“以至成书，约三十余年”②，到去世时尚未定稿。以此推之，他的研究应从1730年之后不久开始，此时杜德美已去世10年以上。

---

① 陈际新．割圆密率捷法序

② 陈际新．割圆密率捷法卷一说明

明安图在弥留之际把学生陈际新叫到病榻前说："予积解有年，未能卒业，汝与同学者务续而成之，则予志也。"[①]陈际新根据老师的遗嘱，"寻绪推究，质以平日所闻面授之言，遇有疑义则与先生之季子景臻及门人张良亭相与讨论，而良亭、景臻亦同时推步校录，越数年、甲午始克成书。呜呼！先生往矣，弟子所继续者既以未得正于先生为歉；而又以先生未得亲见是书之成为痛也。"[②]"甲午"为乾隆三十九年(1774年)，明安图已去世10年了。

前后用了40余年时间完成的这部数学著作就是有名的《割圆密率捷法》。可是这部书的原稿因有"某氏所秘"[③]，未能马上出版。过了65年才由岑建功于道光十九年(1839年)刊刻面世，这个版本目前在一些大图馆容易找到。

《割圆密率捷法》定稿后虽有"某氏所秘"，但是流传很广，人们互相转抄，影响深广，有不少著名数学家进行了研究。正式出版以后，研究者更多。

几年前在北京图馆北海分馆见到一册手写的《割圆密率捷法》，其上有很多修改。根据流传情况来看，未见有人进行较大修改。据此推断：修改前的写本可能是明安图手稿，修改部分可能是陈际新等手笔[④](见图4.3.3)。

岑建功刊本《割圆密率捷法》四卷，目录如下：

卷一　步法

圆径求周

弧背求正弦

弧背求正矢

---

①② 陈际新.割圆密率捷法序

③ "某氏"，有的书上说是张敦仁(1754～1834)。

④ 李迪.《割圆密率捷法》残稿本的发现.自然科学史研究，1996(3)：234～238

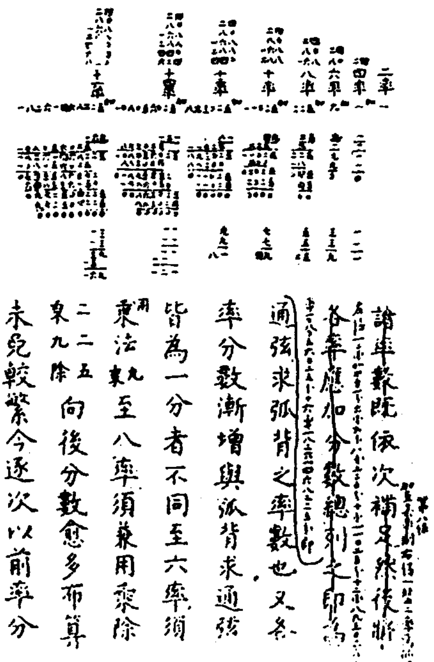


图 4.3.3　《割圆密率捷法》写本书影

弧背求通弦

弧背求矢

通弦求弧背

正弦求弧背

正矢求弧背

矢求弧背

余弧求正弦正矢

余矢余弦求本弧

借弧背求正弦余弦

借正弦余弦求弧背

卷二　用法

角度求八线［二题］

直线三角形边角相求［二题］

弧线三角形边角相求［三题］

卷三　法解上

分弧通弦率数求全弧通弦率数法解［共八题］

弧背求通弦法解

通弦求弧背法解

弧背正弦相求法解

卷四　法解下

分弧正矢率数求全弧正矢率数解法［共八题］

弧背求正矢法解

正矢求弧背法解

弧矢相求法解

弧矢弦正余互用法解

借弧背求正弦余弦法解

借正弦余弦求弧背法解

根据上引目录可知，四卷实为三大部分，即卷三和卷四都是"法解"（内文叫"图解"）。岑氏刊本，全书共145页（双面），而三、四两卷就有115页，占全书的79.3%，为全书的重点部分。卷一的前9个项目即所谓"杜氏九术"的名称，只给出了结果而没有讨论和论证。卷二"用法"主要讲在不用八线表时怎样解平面三角形和球面三角形，似为全书的预备方法。

明安图的表达形式和现在完全不同，最主要的是没有数学符号，正、负用"多"、"少"表示，公式全是用文字叙述。为说明问题，现将卷一"步法"的"圆径求周"术抄录于下并进行分析：

"法：置通径三因之，为第一条，次置第一条四除之，又二除之，又三除之［或三数连乘得二十四为法除之，亦可。后仿此。］

得数为第二条。次置第二条，九因之，四除之，又四除之，又五除之，得数为第三条。次置第三条，二十五乘之，四除之，又六除之，又七除之，得数为第四条。次置第四条，四十九乘之，四除之，又八除之，又九除之，得数为第五条。次置第五条，八十一乘之，四除之，又十除之，又十一除之，得数为第六条。次置第六条，一百二十乘之，四除之，又十二除之，又十三除之，得数为第七条。次置第七条，一百六十九乘之，四除之，又十四除之，又十五除之，得数为第八条。次置第八条，二百二十五乘之，四除之，又十六除之，又十七除之，得数为第九条。次置第九条，二百八十九乘之，四除之，又十八除之，又十九除之，得数为第十条。次置第十条，以三百六十一乘之，四除之，又二十除之，又二十一除之，得数为第十一条。并十一条之数得总数即圆周。"
实际上，还可以第十二条、第十三条等无穷次地作下去，只是明安图未说罢了。

本项目是已知圆径求圆周，用的是无穷级数展开方法。设通径(圆径)为 $2r$($r$ 为半径)，圆周长为 $2\pi r$。上面的引文用现代形式表示就是：

第一条：$3\times 2r=\dfrac{3\times 25}{4^0\times 1!}$,

第二条：$\dfrac{1\times 3\times 2r}{4\times 2\times 3}=\dfrac{1^2\times 3\times 2r}{4^1\times 3!}$,

第三条：$\dfrac{25\times 3^2\times 3\times 2r}{4\times 4^1\times 3!\ \times 4\times 5}=\dfrac{1^2\times 3^2\times 5^2\times 3\times 2r}{4^2\times 5!}$,

……

第十一条：$\dfrac{1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times 17^2\times 19^2\times 3\times 2r}{4^{10}\times 21!}$,

……

其中第一条等号的右端是根据后面各条的规律补上的。由"并十一条之数得总数即圆周"一语，则有

$$2\pi r=\frac{3\times 2r}{4^0\times 1!}+\frac{1^2\times 3\times 2r}{4^1\times 3!}+\frac{1^2\times 3^2\times 3\times 2r}{4^3\times 5!}+\cdots$$
$$+\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times 19^2\times 3\times 2r}{4^{10}\times 21!}+\cdots$$

设 $d=2r$，再略加改变即为梅珏成所记之(1)。

把上式两端除以 $2r$，则得

$$\pi=3\left(1+\frac{1^2}{4\times 3!}+\frac{1^2\times 3^2}{4^2\times 5!}+\cdots+\frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times 19^2}{4^{10}\times 21!}+\cdots\right)$$

就是圆周率的无穷级数表达式之一种。

明安图的表达式是一种递归形式，岑建功在书中的“案”说“若依递加为法，求至无穷，皆能得其密数”一语已注意到此点。

明安图在研究杜德美传进的三个无穷级数过程中，自己又获得六个级数，现以现代形式表示于下。

弧背求通弦：

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\times 3!\ r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\times 5!\ r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\times 7!\ r^6}+\cdots \tag{4}$$

弧背求矢：

$$h=\frac{(2a)^2}{4\times 2!\ r}-\frac{(2a)^4}{4^2\times 4!\ r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\times 6!\ r^5}-\cdots \tag{5}$$

通弦求弧背：

$$2a=c+\frac{1^2\times c^3}{4\times 3!\ r^2}+\frac{1^2\times 3^2\times c^5}{4^2\times 5!\ r^4}+\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times c^7}{4^3\times 7!\ r^6}+\cdots \tag{6}$$

正弦求弧背：

$$a=\sin\alpha=\frac{1^2\times\sin^3\alpha}{3!\ \times r^2}+\frac{1^2\times 3^2\times\sin^5\alpha}{5!\ r^4}+\cdots \tag{7}$$

正矢求弧背：

$$a^2=r\times\frac{2r\times\mathrm{vers}\ \alpha}{2!}+\frac{1^2\times(2r\times\mathrm{vers}\ \alpha)^2}{4!}+$$
$$\frac{1^2\times 2^2\times(2r\times\mathrm{vers}\ \alpha)^3}{6!\ r}+\cdots \tag{8}$$

矢求弧背：

$$(2a)^2=r\times 8h+\frac{1^2\times(8h)^2}{4\times 4!}+\frac{1^2\times 2^2\times(8h)^3}{4^2\times 6!\ r}+\cdots \tag{9}$$

其中$c$为通弦、$a$为弧背(本弧)、$h$为矢、$\alpha$为弧背$a$所对之角度。

由上述可知，九术中只有三术是杜德美传进的，六术为明安图所创，所以“杜氏九术”的叫法不妥，也不能称为“明氏九术”，应称为“杜氏三术”(也不合适)和“明氏六术”，或合称“杜-明九术”。

在“杜-明九术”之后有“按”，不知何人所加，肯定不是岑建功，极大的可能是陈际新，因岑建功所加都有“建功案”字样，用双行小字，而此“按”无“建功”，也不是双行小字，只是比正文低一字。但是其中所说的内容有重要性，“按”说：“以上九法皆至精至密，任有圆线求直线，有直线求圆线；虽推至无穷，靡不合也。但遇设数大者，推算次数较多，故增后法。”其中前一段是对九术的认识，可以曲、直转化；后一段是说因为有些问题有很大的数目，计算很麻烦，所以增加新的方法，予以解决。就是卷一所列之后面四项，它们都是三角公式，也就是通过三角变换使计算有所简化。

余弧求正弦、正矢：

$$r-r\text{covers}\ \alpha=r\sin\alpha(\text{求正弦}),$$

$$r-r\cos\alpha=r\text{vers}\ \alpha(\text{求正矢})。$$

余矢、余弦求本弧：由余弧正矢公式

$$r\text{vers}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=r\text{covers}\ \alpha$$

消去公因子$r$，且令

$$\text{covers}\ \alpha=\text{vers}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=p,$$

代入(8)，得

$$a^2=r\frac{2rp}{2!}+\frac{1^2\times(2rp)^2}{4!}+\frac{1^2\times 2^2\times(2rp)^3}{6!\ r}+\cdots$$

两端开平方，取正值，再与象限弧相减，即得本弧。这是由余矢求本弧。

由余弦求本弧的步骤与此类似。

借弧求正弦、余弦：在题下有注释："余弦即半径、正矢之较，三角形用正矢甚少，故借弧求余弦"，说明为什么要"借弧"。

题中设 $30°<\alpha<60°$，这时要借 45°之弧背与所设弧背相减，得较弧背(即弧背之差)。明安图用四率比例求解，即先给出三项，求比例第四项。先求出"较弧"之正弦、正矢，于是有

半径：借弧之弦线

＝较弧之正弦正矢相加减：弦较与借弧弦线相加减。

最后一项(四率)为所求。第三率和第四率下均有注，前者为"设弧小于借弧求正弦，则加；求余弦则减。设弧大于借弧求正弦则减；求余弦则加"，相当于下面的四个三角公式：

$$r\sin\alpha = r\sin 45° - \sin 45°\ [r\sin(45°-\alpha) + r\operatorname{vers}(45°-\alpha)],$$

$$r\cos\alpha = r\cos 45° + \cos 45°\ [r\sin(45°-\alpha) - r\operatorname{vers}(45°-\alpha)],$$

$$r\sin\alpha = r\sin 45° + \sin 45°\ [r\sin(\alpha-45°) - r\operatorname{vers}(\alpha-45°)]$$

$$-r\cos\alpha = r\cos 45° - \cos 45°\ [r\sin(\alpha-45°) + r\operatorname{vers}(\alpha-45°)]。$$①

第四率的注与此类似，只是右端的正负号改变一下便可。这就由借弧求得了所设弧的正弦和余弦。

借正弦、余弦求弧背：给出了如下的三角公式：

$$(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2},$$

其中 $\alpha$ 为本弧，$\beta$ 为借弧，可为 30°，45°，60°。

下面介绍明安图在数学上的主要成就。

首先，明安图在中国数学史上奠定了无穷级数运算的基础，建

① 罗见今.《割圆密率捷法》译注. 呼和浩特：内蒙古教育出版社，1998. 36

立了无穷级数的加、减、乘运算，特别是无穷数自乘、互乘等更是全新的课题，从而获得一些很好的结果。

其次，明安图在数学史上首次提出并应用了卡塔兰数。卡塔兰(E. Catalan，1814～1894)是比利时数学家，他在1838年的论文中给出了一个数列$C_n$：1，1，2，5，14，42，132，…这便是有名的卡塔兰数，瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707～1783)也于1758年研究过这个数。但是明安图早在他们之前便用到了卡塔兰数，不仅大大早于卡塔兰，也不晚于欧拉。

在《割圜密率捷法》卷三的第一项中多次出现了$C_n$，并有意地用$C_n$进行计算。如图4.3.4在横线下面的横行，由右向左，即是1，1，2，…，132。把它改写成现代形式，就是(改为由左到右)：

$$\begin{array}{cccccccc} q^2 & x^2 & x^4/16 & x^6/16^2 & x^8/16^3 & x^{10}/16^4 & x^{12}/16^5 & x^{14}/16^6 \\ 1= & 1 & +1 & +2 & +5 & +14 & +42 & +132 \end{array}$$

相当于$q^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n x^{2n}/16^{n-1}$，其中

$$C_2=C_1=1,$$

$$C_3=2C_2=2,$$

$$C_4=\binom{3}{1}C_3-\binom{2}{2}C_2=5,$$

$$C_5=\binom{4}{1}C_4-\binom{3}{2}C_3=14,$$

$$C_6=\binom{5}{1}C_5-\binom{4}{2}C_4+\binom{3}{3}C_3=42,$$

$$C_7=\binom{6}{1}C_6-\binom{5}{2}C_5+\binom{4}{3}C_4=132。$$

书上都只列到这7项，但是显然可以往下求下去，可以到任意项，因而可归纳为如下的一般形式：

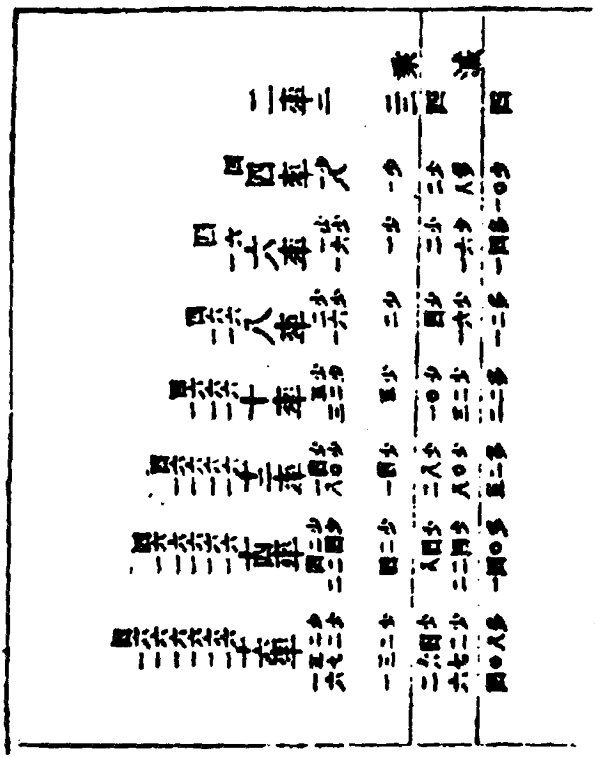


图 4.3.4　《割圆密率捷法》中之 $C_n$ 书影

$$C_{n+1}=\sum_{k=0}(-1)^k\binom{n-k}{k+1}C_{n-k}$$①。

我们建议把$C_n$叫“明安图数”或“明安图-卡塔兰数”。

第三，明安图还创立了一种用含卡塔兰数的级数无穷逼近平方根的算法。他在上面的研究中，构造了一个勾股形，已知弦$c=2x$，勾$a=x^2$，求股$b$，他证得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=2x-\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{n+1}/4^{2n-1},$$

其中$C_n$为卡塔兰数。

第四，明安图在建立无穷级数求反函数理论和算法时，获得了四组互反公式。这就是，在九术中有四对是互反关系，即(2)和(7)，(3)和(8)，(4)和(6)，(5)和(9)。

第五，明安图在研究上术互反关系时，建立并应用了下面的两种计数结构：

$$\begin{bmatrix}i\\j\end{bmatrix}=\frac{(2n+1)!}{(2i+1)!\ (2j+1)!}\quad(0\leqslant i,j\leqslant n,i+j=n),$$

$$\begin{Bmatrix}i\\j\end{Bmatrix}=\frac{2(2n)!}{(2i)!\ (2j)!}\quad(0\leqslant i,j\leqslant n,i+j=n)。$$

最后，还要提一下明安图的高位数字计算。在《割圆密率捷法》中出现大量高位数字，有的多达54位，但很少发现错误。在明安图的时代，中国数学家采用笔算②，明安图也不能例外。这样

① 罗见今．明安图是卡塔兰数的首创者．内蒙古大学学报(自然科学版)，1988(2)：239～245

② 李迪，冯立升．清代数学家使用笔算略论．西北大学学报(自然科学版)，1998(6)：461～466

的高位数用笔算并不容易，这反映出他的计算才能[①]。

明安图的其他一些成就，将在以下几节通过他的研究方法表达出来。明安图的成就都是在证明九术时取得的，对无穷级数证明工作本身是一项中国数学史上的独创，但其证明方法与现在不同，因此本书未从正面讲述这一点。从下面的讨论中可看出其一些基本眉目。

## 第三节　割圆连比例

割圆连比例是清代级数论的几何基础，其思想方法不同于西方而颇具中国特色。它发端于《割圆密率捷法》，而后逐步得到修改和完善。明安图的割圆连比例，以其创始之艰，与后人有所不同。其法既有递归的，也有非递归的，却都归结为迭代的。两种方法既有明显的差异，又有深刻的联系，后人因将梅文鼎的递加法引入其中，从而得以统一他的方法并简化其运算。

割圆的目的在于通方圆，以便确定正弦、正矢与弧背之间的关系。为此，其先决条件是“分弧通弦率数求全弧通弦率数”和“分弧正矢率数求全弧正矢率数”，这也正是引进割圆连比例法的用意所在，今撮其要简述如下[②]。

记$c_n$为$n$分通弦，$d_n$为$n$分正矢。明安图由$c_1$，$c_2$求$c_3$如图4.3.5所示：$BC=CD=DE=c_1$，$BD=CE=c_2$，$BE=c_3$。取$G$，$F$，$I$，$H$，…各点，使$BG=BC$，$CF=CG$，$CI=CD$，$DI=DH$，$BJ=BD$，$EK=CE$，$CM=CK$，$DJ=DL$。于是可得两列连比例三

① 以上的内容参考了：罗见今．明安图是勇于创新的数学家．西北民族学院学报，1993(2)：80～85

② 详细解说见：李俨．中算史论丛(三)．北京：科学出版社，1955．319～325；罗见今．明安图计算无穷级数的方法分析．自然科学史研究，1990，9(3)：197～207；山田慶兒．中国古代科學史论．京都：京都大學人文科學研究所，1989．241～244

角形

$$\triangle BDJ，\triangle DJL，\cdots 及\triangle ABC，\triangle BCG，\triangle CGF，\cdots$$

不妨设“一率半径”为1，则 $AB:BC:CG:GF=1:c_1:c_1^2:c_1^3$，且 $BC:GF=BD:JL$，即

$$JL=\frac{GF\cdot BD}{BC}。$$

又 $GF=2BC-BD$，而 $BE=2BD-JK$，故

$$BE=2BD-\frac{(2BC-BD)BD}{BC}-BC,$$

即

$$c_3=c_2^2/c_1-c_1。$$

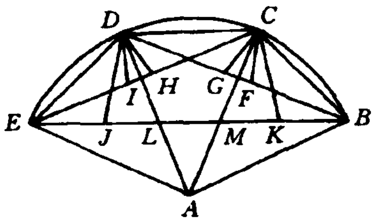



图 4.3.5

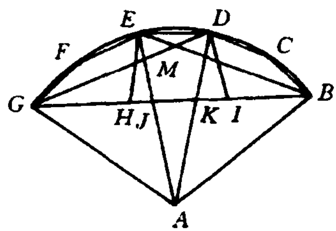



图 4.3.6

类似地，由 $c_1$，$c_3$ 求 $c_5$ 如图 4.3.6，也得到两列连比例三角形

$$\triangle BEH，\triangle EHJ，\cdots 及\triangle ADE，\triangle DEM，\cdots$$

则 $AB:EM=BE:HJ$，$BG=2BE-HI=2BE-HJ-ED$，于是

$$c_5=(2-c_1^2)c_3-c_1。$$

至于 $c_2$，它是通过级数回求法所得。在此基础上求 $c_4$ 如图 4.3.7 同样得到连比例三角形

$$\triangle ABC，\triangle BCG，\cdots 及\triangle BDH，\triangle DHJ，\cdots$$

于是 $HI=GC\cdot BD/AB$，$FB=2BD-HI$，从而

$$c_4=2c_2-c_1^2c_2。$$

综上即为

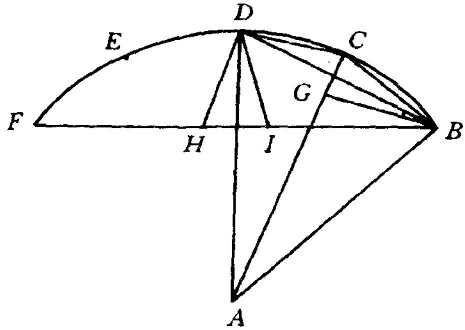



图 4.3.7

$$c_n=\begin{cases}\sqrt{4c_1^2-c_1^4} & (n=2),\\ c_2^2/c_1-c_1 & (n=3),\\ (2-c_1^2)c_2 & (n=4),\\ (2-c_1^2)c_3-c_1 & (n=5)。\end{cases} \quad ①$$

由此，他用所谓“超位”算法

$$c_{10n}=5c_{2n}-5c_{2n}^3+5c_{2n}^5,$$

而

$$c_{2n}=2c_n-\frac{c_n^3}{4}-\frac{c_n^5}{4\times 16}-\frac{2c_n^7}{4\times 16^2}-\frac{5c_n^9}{4\times 16^3}-\cdots$$

则

$$c_{10n}=f(c_n)。\quad ②$$

“分弧正矢率数求全弧正矢率数”法(《捷法》卷四)与前法有同有异，由 $d_1$ 求 $d_2$ 如图 4.3.8，令 $BG=BC$，$EI/\!/CH/\!/DA$，$JGK/\!/BF$，则 $CE=d_1$，$DF=d_2$，且有连比例三角形

$$\triangle ABC,\ \triangle BCG,\ \triangle CGM,\ \cdots$$

注意到 $DL=CE$，$KL=CJ$，…有

$$DF=2CE+CJ=2CE+CM-JM=2CE+CM-\frac{CE\cdot CM}{AB},$$

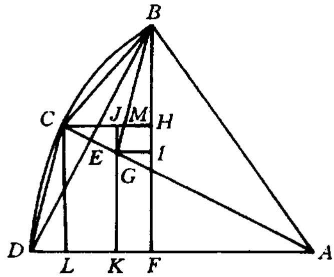



图 4.3.8

即

$$d_2=2d_1+2d_1(1-d_1)。$$

类似可得

$$d_n=2d_1+2d_{n-1}(1-d_1)-d_{n-2}\quad(n=2,3,4,5)。\tag{③}$$

其中零分正矢自然为零，即 $d_0=0$。对于③仍用超位算法得到

$$d_{10n}=g(d_n)\ (n=10^k,k=0,1,2,\cdots)。\tag{④}$$

明安图的割圆连比例大抵如此，对此我们可作如下方法分析。

在“分弧通弦率数求全弧通弦率数”时，他由两列连比例三角形，即由两种连比例推出①；而在“分弧正矢率数求全弧正矢率数时”，却只由一种连比例导出③。其直接后果是，③为递归的，而①却为非递归的。

他称自己的方法为割圆连比例，这一方面是由于特解①和③是通过割圆确定的；另一方面它们也是通过连比例三角形得到的。至于它们的无穷子解集②和④，为避免逐数相求之繁而设超位法，也即迭代法（第一次超位除外）。他指出：“此隔一分加减之法较逐位递求者固为易矣，然析至千万分亦不胜其繁，故又设以两分数弧通弦率数求两分数乘一分数通弦率数之法于后。”为此先以“二分弧为一分弧，十分全弧为五分全弧立算”，得到②当 $n=1$ 时的情形。由于 $c_n$ 的任一无穷子集总能使 $\lim\limits_{n\to\infty} nc_1=a$（$c_n$ 所对弧），因而

超位算法是允许的，即便不能算作一个好的方法。如果 $n$ 与 5! 互质，则不能由此解出 $c_n$，因此它不是递归的。明氏取 $n=10^k(k=0,1,2,\cdots)$，则它已由②完全确定[①]，迭代一次得 $c_{100}$，余类推。对于 $d_n$ 的处理也完全一样，因此②和④都是标准迭代程序[②]。不过③与①不同，当 $n>5$ 时仍然成立。因此，尽管他一如前例还用超位算法，但其实③是一个二阶的非齐次线性递归过程（但不是由递加法确定的）。

我们知道，如要取得满足一定精度要求的个别近似值，则迭代方法有时会比递归方法更加有效。然而为处理无穷而所关心的重点是整体结构时后者显然要优于前者。因为严格来讲，迭代法用于无穷级数并不合理，明安图之所以能用迭代法，是由于他把无穷级数作为多项式来处理。即便如此，至少可以说这是没有必要的，其每一步都只是个值而计算量却大得惊人；而后者可有方便的通项及部分和公式，提供了量与量之间的关系又简化了计算。后来的中算史家对③这种结构的意义非常关注，还曾尝试其通项及部分和求法[③]，然而明安图及其门人似乎对此并没有多大兴趣。

事实上，确定解集所必须的最少特解个数是检验一个割圆连比例好不好的重要标志之一，而在中算家的所有割圆连比例中除了①之外均为二阶递归过程，因此只需要两个特解。对于较为特殊的③，所需特解甚至均为自明的，倘使由此入手寻求通解，则无需“又设以两分数弧通弦率数求两分数乘一分数通弦率数之

---

① 明安图．割圜密率捷法．卷三．道光己亥（1839 年）孟秋石梁岑建功校刊本

② 关于中算史家的迭代法，刘焯早在古代历法中就用过（参阅：纪志刚．皇极历定朔算法及其数理分析．见：数学史研究文集（第六辑）．1995），并且晚于明安图的戴煦和项名达等人也都用过（参阅：王荣彬，郭世荣．戴煦、项名达、夏鸾翔对迭代法的研究．自然科学史研究，1992，11（3）：209～211）。

③ 特古斯．晚清算家对递加数性质的认识．内蒙古师范大学学报（自然科学版），1997（2）：62～67

法”。然而这一点却又经历了半个多世纪艰难曲折的探索，消磨了好几位中算家毕生的才华。科学的道路是不平坦的。

明安图不用递归而用迭代，这是由于他未能运用梅氏递加法的缘故。要应用梅氏递加法，必须保证割圆连比例的线性关系，这要求它只由一种连比例构成。为此，把诸分弦矢作为一个系统考虑是方便的。并且，一个好的割圆连比例应该完全取决于连比例自身，而不需要其他手段。他似乎没有注意到如果割圆连比例不是只由一种连比例构成则难以保证它的线性关系，也没有意识到如果把诸分弦矢作为一个系统考虑可便于运用梅氏递加法，以致于用两种不同的割圆连比例分别处理通弦与正矢，并借助其他数学方法，从而导致方法不统一，而计算量过大。由图 4.3.5～图 4.3.8 的作法来看，通弦率数法出线奇分则必轴线对称，可引线路不唯一，各成一列连比例三角形，而半径线与通弦线略者无定数；出线偶分则每以基本关系 $c_{2n}^2=4c_n^2-c_n^4$ 为基础更成两列连比例三角形。正矢率数法由弧的一端出线，很有规律：引$(n+1)$条半径线成 $n$ 分弧，各引偶分通弦之半，而略奇分$(>1)$通弦，于是对任意的 $n$ 只成一种连比例三角形。也就是说，两种法解虽同为割圆连比例，而后者成于一种连比例，前者却不是。如果后者补引偶分通弦另一半并引奇分通弦，则弦矢可得以统一考虑，从而可用梅氏递加法，即可由此得到董祐诚乃至项名达的割圆连比例；而前者无此推广价值。

综上所述，明安图的割圆连比例法特色为：弦矢分别讨论，前后法解不同。通弦率数法解为非递归的，采用不止一种连比例；正矢率数法解为递归的，只用一种连比例。两种方法均非纯粹连比例，最后都作迭代处理。计算量虽然浩繁，却得到了偶分通弦率数，这正是后来项氏因董氏所无而“畜是疑有年”[①]者。因此就所

---

① 项名达．象数一原．卷一．光绪十四年(1888 年)．上海赵氏《高斋丛刻》本

得结果而言，他甚至超过了后来的董祐诚，而且在他的连比例方法中还潜在着引进递加法的可能性。总之，明安图的割圆连比例思想，尤其是他的正矢率数法解为后人研究幂级数指明了一个方向，也为梅氏递加法的应用开辟了广阔前景。

## 第四节　明安图变换

作为清代级数论的代数基础，明安图变换最具中算传统特色。清代级数论由于它的运用而归于清晰、简捷，它把中算以代数见长的优秀传统发扬到了一个新的水平。由于割圆连比例解均由该变换导出，并且清代级数论的每一步重要进展也都以它为基础，因此它标志着清代级数论的主要特征。虽然至项名达它才最终得以完善，但它自从明安图开始一直在发挥重要作用。它是多项式空间基变换下比较特殊的一种坐标变换：

设 $A$ 与 $B$ 分别为 $y$ 在两组基 $1, t, t^2, \cdots$ 与 $1, x, x^2, \cdots$ 上的坐标，如果 $M$ 是基变换

$$x^k=\Big(\sum_{n\geqslant 1}x_n t^n\Big)^k=\sum_{n\geqslant k}M_{n,k}t^n \qquad ⑤$$

的矩阵，则

$$A=BM, \qquad ⑥$$

当且仅当 $x_1\neq 0$ 时

$$B=AM^{-1}。 \qquad ⑦$$

互逆变换⑥和⑦即为明安图变换。在说明该变换之前，我们首先介绍一个有关的重要概念——明安图多项式[①]，因为变换的

---

① 也即普通型 Bell 多项式（见 Louis Comtet. 高等组合学. 大连：大连理工大学出版社，1991. 155），以明安图早于 Bell 约两个世纪，又别自一理，姑且称之。不过，中算家对此虽有重要应用，其实并没有引进这一概念，因为一些典型的方面没有涉及到。

特征决定于过渡阵，而明安图变换的矩阵是由明安图多项式的值所构成。

明安图多项式 $M_{n,k}=M_{n,k}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1})$ 是由级数展开式⑤所定义。它是 $k$ 次齐次的，有整系数及权 $n$。其确切表达式为

$$M_{n,k}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1})=\sum\frac{k!}{k_1!\ k_2!\ \cdots}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots \tag{8}$$

这里的和式取遍所有满足 $k_1+k_2+k_3+\cdots=k$，$k_1+2k_2+3k_3+\cdots=n$ 的整数 $k_i\geqslant 0$。

显然，它的系数是集合 $[k]$ 的$(k_1,k_2,\cdots)$分类数，所以为整数。并且，它的单项式个数等于具有 $k$ 个加数的 $n$ 的分拆数。事实上，如果 $x_i$ 是某环中的交换元，则对所有整数 $k\geqslant 0$，有

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)^k=\sum(k_1,k_2,\cdots,k_n)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}。\tag{9}$$

⑨的右端和式取遍所有使 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的 $n$ 元组。于是

$$(\sum_{n\geqslant 1}x_nt^n)^k=\sum_{k_1+k_2+\cdots=k}\frac{k!\ \ t^{k_1+2k_2+\cdots}}{k_1!\ k_2!\ \cdots}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots \tag{10}$$

比较⑤与⑩的右端即得⑧。由此可得

$$M_{n,k}(abx_1,ab^2x_2,ab^3x_3,\cdots)=a^kb^nM_{n,k}(x_1,x_2,\cdots)。$$

可以证明，它还有如下一些性质：

$$M_{n,k}=\sum_{m=k-1}^{n-1}x_{n-m}M_{m,k-1}。$$

$$M_{n,k}(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x_1^mM_{n-m,k-m}(0,x_2,x_3,\cdots)。$$

$$M_{n,n-m}(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{k=m+1}^{2m}\binom{n-m}{k-m}x_1^{n-k}M_{k,k-m}(0,x_2,x_3,\cdots)。$$

$$M_{n,k}(x_1+t_1,x_2+t_2,\cdots)=\sum_{i\leqslant k,j\leqslant n}\binom{k}{i}M_{j,i}(x_1,x_2,\cdots)M_{n-j,k-i}(t_1,t_2,\cdots)。$$

$$M_{n,k}(0,\cdots,x_{m+1},x_{m+2},\cdots)=M_{n-km,k}(x_{m+1},x_{m+2},\cdots)。$$

$$M_{n,k}(0,\cdots,x_m,0,\cdots)=\begin{cases}x_m^k, & 若\ n=mk,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

以下是它的几个特殊值：

$$M_{n,k}\left(1,\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \cdots\right)=\frac{k^{n-k}}{(n-k)!}。$$

$$M_{n,k}(1,1,\cdots)=\binom{n-1}{k-1}。$$

$$M_{n,k}\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right)=\frac{k!}{n!}|s(n,k)|。$$

$$M_{n,k}\left(1,\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \cdots\right)=\frac{k!}{n!}S(n,k)。$$

容易看出，其中前两者分别与所谓幂等数和 Lah 数线性相关，而后两者中 $s(n,k)$，$S(n,k)$ 分别为第一和第二类 Stirling 数。

晚清数学家称⑥为“借径术”，如果过渡阵中明安图多项式的定元与已知坐标 $B$ 的分量一致，而⑦称为“易率法”。特别地，当 $A=(0,1,0,\cdots)$ 时⑦称为“还原术”，或称级数回求法。利用明安图多项式的性质，对它们可作如下说明：

令 $M_n$ 为 $M$ 的左上角 $(n+1)$ 级子阵，则

$$A_n=B_nM_n。\qquad ⑥'$$

这里 $A_n=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$，$B_n=(b_0,b_1,\cdots,b_n)$。由于 $M_n$ 为一上三角阵，其行列式为

$$|M_n|=M_{0,0}M_{1,1}\cdots M_{n,n},$$

但 $M_{k,k}=M_{1,1}^k=x_1^k$，即当且仅当 $x_1\neq 0$ 时 $M_n$ 为非退化从而可逆，故当且仅当 $x_1\neq 0$ 时⑥′对任何 $A_n$ 都有解

$$B_n=A_nM_n^{-1}。\qquad ⑦'$$

上述结果对任意整数 $n\geqslant 0$ 都成立。

一分弧通弦求二分弧通弦是明安图求解割圆连比例的第一步，也是关键一步。它涉及由

$$x=4t-t^2$$

确定

$$t=b_1x+b_2x^2+\cdots$$

这一开方式的展开问题①，这是中算史上第一例无穷级数展开式，其展开方法就是明氏变换。由于这里 $A=(0,1,0,\cdots)$，$M_{n,k}=M_{n,k}(4,-1,0,\cdots,0)$，于是由⑦得到

$$b_0=0,\qquad b_k=C_k/4^{2k-1}\ (k\geqslant 1)。$$

此即清代级数论中的首例还原术，其中 $C_k$ 即所谓“卡塔兰数”。

由于 $b_k$ 是伴随阵 $M_n^*$ 的第二行元素 $m_{1,k}$（即 $M_n$ 中第二列元素 $M_{1,k}$ 的代数余子式）除以 $|M_n|$ 的结果，也即 $b_k=m_{1,k}/|M_n|$，因此

$$C_k=4^{2k-1}\frac{m_{1,k}}{|M_n|}。\tag{11}$$

⑪较为真实地反映了“明安图创卡塔兰数的方法”②，并且说明了这里必然出现卡塔兰数的特定条件及其计数规律赖以形成的基本原理。

值得一提的是，明安图为他的上述变换还提供了两个补充说明，其中“二法”与前法略同，而“三法”为几何的等积变换。后来徐有壬“自成一队”重新发现了它，并试图将全部清代级数论置于其上③。不过除此之外它别无应用，并且由于它本身的概括性和穿透力及其解法的清晰度和简捷度方面较明氏变换尚多逊色，最终他还是不得不以明安图变换为主，因此对于清代级数论它不具有基本的重要性。

---

① 明安图. 割圜密率捷法. 卷三. 道光己刻(1839年)孟秋石梁岑建功校刊本

② 罗见今. 明安图创卡塔兰数的方法分析. 内蒙古大学学报(自然科学版)，1989(1)：29～40

③ 徐有壬. 割圜八线缀术. 卷二. 同治十二年孟秋荷池精舍刻本

至于求割圆连比例的一般解，实质上它是有理二项式的展开问题。对此明安图改用⑥，但较为特殊，过渡阵中明安图多项式的定元与已知坐标 $B$ 的分量一致；后来的中算家则不同，仍用⑦，且已相当一般化[①]。

在分弧通弦求全弧通弦时，明安图求到 $c_5=h(c_1)$ 之后开始用超位算法。如前所述，所谓超位算法其实就是迭代法，每迭代一次就是一个借径术，也就是一次变换⑥。由于一分通弦求二分通弦法 $c_2=g(c_1)$ 已如前述，则 $n$ 分通弦求 $2n$ 分通弦为 $c_{2n}=g(c_n)$。于是将五分之一弧析分为 $2n$ 分时，有

$$c_{10n}=h[g(c_n)]=f(c_n)。\tag{⑫}$$

当 $n=1$ 时⑫为已知，迭代一次得百分弧通弦。为说明问题起见，此处记全弧通弦为 $c$，十分之一弧通弦为 $x$，百分之一弧通弦为 $t$，则

$$c=b_1x+b_2x^2+\cdots,\tag{⑬}$$

$$x=b_1t+b_2t^2+\cdots,\tag{⑭}$$

$$c=a_1t+a_2t^2+\cdots。\tag{⑮}$$

通过⑭由⑬到⑮自然是 $c$ 在基变换⑤下的坐标变换⑥，事实上

$$c=\sum_{k\geqslant1}b_kx^k=\sum_{k\geqslant1}b_k\sum_{n\geqslant k}M_{n,k}t^n=\sum_{k\geqslant1}(\sum_{i=1}^{k}b_iM_{k,i})t^k=\sum_{k\geqslant1}a_kt^k。$$

借径术与还原术的发明是明安图对清代级数论研究的重大贡献[②]，这都应归功于明安图变换的运用。

继明安图之后，割圆连比例又经过不断改进，其解法相应地也有了很大的发展和变化，但所用依然还是明安图变换。由上述

---

① 特古斯. 明安图多项式及其应用. 第四届中国少数民族科技史国际学术讨论会论文集(待出)

② 何绍庚. 明安图的级数回求法. 自然科学史研究，1984，3(3)：209～216

讨论可知，借径术同还原术有两点重要区别：一是过渡阵的取法不同，借径术毋须求逆，还原术必须求逆；二是待变换的坐标形式不同，还原术极为特殊，借径术较为一般。它们显然有待推广统一，这正是后来项名达引进易率法的客观基础。由于项氏割圆连比例已经成熟，因而只须确定初解即可。他在确定初解的“借率”$A=(a_0,a_1,\cdots)$以及“相当率”$\{x_k\}$（过渡阵中明安图多项式的变元，$x_1\neq0$）之后，即得“用率”$\frac{M_{n,k}}{x_1^k}$和“定率”$\frac{M_{n,k}m_{n,k}}{x_1^k|M_n|}$，“于是借率可易为本率”，通过⑦便得 $B$。也就是说，在确定割圆连比例的初解 $y$ 时[①]，项名达分别以借率法和易率法获得

$$y=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots \tag{16}$$

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots \tag{17}$$

其中 $t$ 为借弧通弦，$x$ 为本弧通弦。它们之间的关系为

$$x=x_1t+x_2t^2+\cdots \tag{18}$$

通过⑱由⑯到⑰显然是 $y$ 在基变换⑤下的坐标变换⑦。事实上，对任意给定的 $A_n=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$以及 $M$ 的左上角$(n+1)$级子阵 $M_n$，有

$$A_n=B_nM_n。 \tag{19}$$

由项名达恒等式(见下页脚注①)，有

$$x_1=\begin{cases}q, & 若\ q\ 为奇数,\\ q/2, & 若\ q\ 为偶数,\end{cases}$$

即 $M_{k,k}=M_{1,1}^k=x_1^k\neq0$，从而 $M_n$ 可逆，故⑲对任何 $A_n$ 都有解

$$B_n=A_nM_n^{-1}。$$

于是

① 项名达．象数一原．卷三．光绪十四年(1888)．上海本

$$y=\sum_{k\geqslant 0}a_kt^k=\sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{i=0}^{k}b_iM_{k,i}\Big)t^k=\sum_{k\geqslant k}b_k\sum_{m\geqslant k}M_{m,k}t^m=\sum_{k\geqslant 0}b_kx^k。$$①

值得注意的是，易率法推广了借径术和还原术。与还原术比较，易率法推广了它的基和坐标；与借径术比较，除了基和坐标的推广之外还把明安图多项式特定的变元推广为一般的变元，变换方向则相反。于是，一方面它是还原术的直接推广，另一方面其逆为借径术的推广，而互逆变换是作为一个变换，因此借径术与还原术统一于易率法。

明安图变换不仅是确定割圆连比例解的关键方法，而且还是清代级数论扩大成果的主要手段。在项名达之前除了运用分析的方法将有关角度的结果化为弧度的结果之外，主要是应用明安图变换；而在项名达之后分析活动终止，除法运算代之而起②，此外主要还是应用明安图变换。事实上晚清级数论方法主要是比例法、商除法、借径术和还原术，其中前者只用于构造明安图多项式，其实含于后两者中，而后两者为明安图变换，唯除法为算术，这反

---

① 项名达恒等式即所谓“相当率”（参阅：项名达. 象数一原. 卷三. 光绪十四年(1888 年). 上海赵氏《高斋丛刻》本）：

$$x=\begin{cases}[X_{2p-1}(1)+X_{2(q-p)-1}(1)]\ /X_{|2p-q|-1}(1), & 若\ q\ 为奇数,\\ [X_p(1/2)+X_{q-p}(1/2)]\ /X_{|p-q/2|}(1/2), & 若\ q/2\ 为奇数,\\ [X_p(1/2)+X_{q-p}(1/2)]\ /X_{|p-q/2|-1}(1/2), & 若\ q/2\ 为偶数。\end{cases}$$

由此可有

$$x_1=\begin{cases}[\varphi_1(1,2p-1)+\varphi_1(1,2q-2p-1)]\ /\varphi_1(0,|2p-q|-1), & 若\ q\ 为奇数,\\ [\varphi_{1/2}(1,p)+\varphi_{1/2}(1,q-p)]\ /\varphi_{1/2}(0,|p-q/2|), & 若\ q/2\ 为奇数,\\ [\varphi_{1/2}(1,p)+\varphi_{1/2}(1,q-p)]\ /\varphi_{1/2}(0,|p-q/2|-1), & 若\ q/2\ 为偶数,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}q, & 若\ q\ 为奇数,\\ q/2, & 若\ q\ 为偶数。\end{cases}$$

这里 $X_n(l)$ 为割圆连比例（参阅：特古斯. 试论清代割圆连比例方法. 自然科学史研究，1996，15(4)：319～325），$\varphi(m,n)$ 为递加数（参阅：特古斯. 清代中算家的递加数. 自然科学史研究，1995，14(4)：337～348）.

② 戴煦. 外切密率. 卷一. 咸丰二年(1852 年). 粤雅堂丛书本

映出代数传统在清代级数论中的重要地位。总之，明安图变换是清代级数论中的光辉成就，清代级数论中的大量成果都应归功于明安图变换的运用。

## 第五节　极限思想与运算规则

明安图以割圆连比例确立全弧弦矢与分弧弦矢的级数关系之后，又以明安图变换获得了它们的解析表达，然而这同杜氏形式还有一定距离。要跨越这一距离就无法回避无限与连续的考虑，因此不可避免地要涉及到分析的讨论。对此，明安图基本上是靠直觉推理，尽管实质上这已超出了直观形象和感觉经验之外。

明安图取 $n=10^k(k=1,2,3)$，由②得到百分、千分、万分弧通弦率数，于是

$$c_n=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k c_1^{2k+1}。\qquad ②'$$

不过，由割圆连比例解所确定的这个结果只是全弧通弦与分弧通弦的关系。为了把它化为全弧通弦与弧背的关系，某种形式的无穷小分析势在必行。

“弧，圆线也；弦，直线也，二者不同类也。不同类，虽析之至于无穷，不可以一之也。然则终不可相求乎？非也。弧与弦虽不可以一之，苟析之至于无穷，则所以不可一之故见矣。得其不可一之故，即可因理以立法，是又未尝不可以一之也，何为而不可相求乎？”①。

经过仔细观察②′的结构及其变化趋势，明安图发现了三个重要的事实：$a_0=n$；$\dfrac{a_{k-1}n^2}{a_k}\approx 4(2k)(2k+1)$；随着 $n$ 的增大，$4(2k)(2k+1)$之数不改，而奇零之差愈推愈微。对最后这一点他分析道：

① 明安图．割圆密率捷法．卷三．道光己亥(1839年)孟秋石梁岑建功校刊本

"盖累求而奇零不尽者，此弧线、直线之所以不可以一也；去奇零而用整分者，因其不可一而得其所以可一也。"于是得出结论：若径以弧背为二率，则奇零必尽，而为整数 $4(2k)(2k+1)$ 矣。也就是说，因为当 $n\to\infty$ 时 $\frac{a_{k-1}n^2}{a_k}\to 4(2k)(2k+1)$，如以全弧通弦 $c$ 所对的弧背 $x$ 取代分弧通弦的和 $nc_1$，则必有 $a_k c_1^{2k+1}=\frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)!}$，于是

$$c=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)!}。\tag{⑳}$$

类似地，明安图取 $n=10^k(k=1,2,3)$，由④得到

$$d_n=\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}b_k d_1^k。\tag{④'}$$

由此他发现：$b_0=n^2$；$\frac{2b_{k-1}n^2}{b_k}\approx(2k)(2k-1)$；随着 $n$ 的增大，$(2k)(2k-1)$ 之数不改，而奇零之差愈推愈微。于是 $b_k d_1^k=b_k\frac{c_1^{2k}}{2^k}\to\frac{x^{2k}}{(2k)!}(n\to\infty)$，从而

$$d=\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}。\tag{㉑}$$

⑳和㉑是极限思想的出色结论，杜-明九术以此二术最为基本，称为"弧背求通弦"和"弧背求正矢"，其他诸术均可依此而定。事实上，⑳如以 $x$ 为半弧而非全弧，则

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

称为"弧背求正弦"。考虑到㉑的 $d=1-\cos x$，则

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

此式如以 $x$ 为全弧而非半弧，则成为"弧背求矢"。还原以上四术又得"通弦求弧背"、"正矢求弧背"、"正弦求弧背"和"矢求弧

背”四术，而$\pi$的展开式不过是正弦求弧背术的一个特例，总为杜-明九术。虽然由于未能产生极限概念而难以严格地说明它们的可靠性，但它们无疑体现出了中算家对于引进成果的认真态度和消化水平。

此外，明安图出于实际需要还提出了所谓“降位”的概念，并为后来的中算家所沿用。设级数的一般项为$a_nx^n$，则其降位速度决定于

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=k_n|x|$$

的值。其值越小，降位越快；反之越慢。虽然这只是为了简化级数近似值的计算而引进的概念，但和收敛性有一定关系。当$x$一定时降位速度和收敛速度一致；当收敛速度一定时$|x|$越小降位越快。显然，在点$x=0$的某个不大的邻域内尽量选择降位快的展开式总能保证级数近似值的有效性，因此中算家尚无关注收敛性要求的机会。由于三角函数展开式的降位速度与其余函数展开式的降位速度为互补关系，于是中算家经常通过变换弧度以选择降位较快的展开式。

总之，明安图以离散的方式处理关于连续的问题已属不易，而以直觉获得关于无限的正确结果更是难能可贵，其关键就在于发挥了自刘徽以来的极限思想。

清代级数论的算术基础由有理数域上级数的相等规定以及加减乘除四则运算构成，运算以相等规定为其基础，而相等规定隐含于运算之中。为了运算的需要，明安图把率的概念用于幂级数。幂级数的项称为条，由系数和(连比例)率构成，带有前一条系数的率称为率数(率的值也称为率数。一般地，$M_n$称为连比例第$(n+1)$率，如果$M_0=1$，$M_n=M_{n-1}x$)。运算必依同率结合法，其合理性由几何直观提供保证，究竟还是形数对应观念的发挥。

四则运算中前三种运算均由明安图引进[①]，形式上它们总能进行：如果

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$g=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

则

$$f\pm g=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots$$

$$f\cdot g=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

至于除法，它比较特殊，并不总是可行的。项名达在确定割圆连比例的半分初解时首先算出 $1/f$ 形除法，然后在“借率法”中以及由它导出“相当率”时都大量使用了 $f/g$ 形除法[②]，可以归纳如下：如果

$$f/g=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

则 $c_k$ 必须对所有的 $k\geqslant0$ 满足 $a_k=b_0c_k+b_1c_{k-1}+\cdots+b_kc_0$。因此如记 $f$ 的首项次数为 $\partial f(\geqslant0)$，则当且仅当 $\partial f\geqslant\partial g$ 时存在 $h$ 使 $f=gh$，并且如果 $\partial g=k$，则

$$h=\frac{a_k}{b_k}+\left(\frac{a_{k+1}}{b_k}-\frac{a_kb_{k+1}}{b_k^2}\right)x+\left(\frac{a_{k+2}}{b_k}-\frac{a_{k+1}b_{k+1}+a_kb_{k+2}}{b_k^2}+\frac{a_kb_{k+1}^2}{b_k^3}\right)x^2+\cdots$$

一般地，如果对所有整数 $k\geqslant0$ 有 $a_k=b_k$，则 $f=g$。

由于中算家对级数收敛性缺乏分析的讨论，因此就一般意义而言，规定如上相等关系以及施行上述四则运算的合理性得不到说明。但就具体级数来说，中算家对其收敛性一般都有几何论证，所以它们都是允许的。不过中算家未必认识到它们对级数的收敛性要求，实际上它们是把多项式运算形式地平移到级数中来的结果，这使得清代级数论多少带有形式级数的色彩。

---

① 罗见今．明安图计算无穷级数的方法分析．自然科学史研究，1990，9(3)．197～207

② 项名达．象数一原．卷三．光绪十四年(1888)．上海赵氏《高斋丛刻》本

综上所述可知，明安图的数学工作有如下一些特点：无穷级数展开的可能性及收敛性由割圆连比例提供几何保证，而展成级数的具体操作则由明安图变换提供代数方法；由于讨论对象仅限于少量收敛的幂级数，它们具有和多项式完全相同的运算性质，因此将其运算等同于多项式运算不致于引起危机；曲直互通以极限思想为基础，虽不够严格，但结论正确。明安图工作的意义在于，他不仅证明了杜-明九术，还为后人进一步研究级数展开提供了除法运算以外一切必要的手段。事实上，后来的中算家对割圆连比例以及明安图变换等方法的改进虽然出色，但并非必不可少。他们之所以得到几乎所有基本初等函数的展开式，除了引进个别知识以外主要是基于明安图已有的工作，明安图对清代级数论的影响是决定性的。

# 明末到清中叶研究论著
# 分类文献

（每类按写作、发表年代先后为序）

## 专　　著

### 一、通史性数学史著作

1　Yoshio Mikami. The Development of Mathematics in China and Japan. Leipzig，1913

2　三上义夫．中国算学之特色．林科棠译．见：万有文库．1929，1934；国学小丛书．1933，1934

3　李俨．中国算学史．上海：商务印书馆，1937；成都：商务印书馆，1945；上海：商务印书馆，修订版，1955；台北：九章出版社，1993

4　李俨．中国数学大纲(下册)．北京：科学出版社，1958

5　Joseph Needham. Science & Civilisation in China (Vol. Ⅲ). Cambridge：Cambridge University Press，1959. 1～168

6　李俨，杜石然．中国古代数学简史(上)．北京：中华书局，1963

李俨，杜石然．中国古代数学简史(下)．北京：中华书局，1964

本书的英文译本是：

Chinese mathematics：A concise history. Translated by Closeley J N & Lun A W C. Oxford：Clarendon Press，1987

7　钱宝琮．中国数学史．北京：科学出版社，1964，1992

8 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984

9 沈康身. 中算导论. 上海：上海教育出版社，1986

10 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986

11 Martzloff J C. Histoire Des Mathematiques Chinoises. Paris，Milan，Barcelone，Mexico，1988

它的英文译本是：

A History of Chinese Mathematics. Translated by Stephen S. Wilson. Berlin，Heidelberg，New York：Springer-Verlag，1997

12 刘钝. 大哉言数. 沈阳：辽宁教育出版社，1993，1995

13 李兆华. 中国数学史. 台北：文津出版社，1995

14 冯立升. 中国古代测量学史. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1995

15 李信明. 中国数学五千年. 台北：台湾书店，1998

16 李迪. 中国传统数学文献精选导读. 武汉：湖北教育出版社，1999

## 二、中西数学交流著作

1 Aloys Pfister. 入华耶稣会士列传. 冯承钧译. 长沙：商务印书馆，1938

2 Joseph Needham. Chinese Astronony and the Jesuit Mission：an Encounter of Cultures. London：China Society，1958

3 Délia，Pasquale M. Galileo in China. Translated by Rufus Suter and Matthew Sciascia. Cambridge（U.S.A）：Harvard University Press，1960

4 张奉箴. 利玛窦在中国. 台北：闻道出版社，1983

5 徐宗泽. 明清间耶酥会士译著提要. 北京：中华书局，1989

6 Rodrigues F. Jesuitas Portugueses Astrónomos na China

（佛朗西斯·罗德里杰斯. 葡萄牙耶酥会天文学家在中国）. 澳门：澳门文化司署，1990

7 张永堂. 明末清初理学与科学关系再论. 台北：台湾学生书局，1994

8 林华等. 历史遗痕. 北京：中国人民大学出版社，1994

9 Peter M. Engelfriet. Euclid in China. Leiden，Boston，Kohn，Brill，1998

### 三、人物传记

**徐光启**

1 罗光. 徐光启传. 香港，1953

2 王重民. 徐光启. 上海：上海人民出版社，1981

3 梁家勉. 徐光启年谱. 上海：上海古籍出版社，1981

4 Hashimoto K. Hsü Kuan ch'i and Astronomical Reform. Osaka：Kansai University Press，1988

**利玛窦**

1 Henri Bernard. 利玛窦传. 王昌社译. 1943

2 艾儒略. 大西利先生行迹. 北京大学图书馆藏抄本

3 罗光. 利玛窦传. 台北：光启出版社，1960

**李之藻**

1 方豪. 李我存年谱. 1937

2 方豪. 李之藻研究. 台北，1966

**汤若望**

1 魏特(Alfons Vath). 汤若望传. 杨丙辰译. 上海：商务印书馆，1949

2 Erst Stürmer. Meiter Himmlischer Geheimnisse：Adam Schall (1592～1666). Printed in Austria，1988

**南怀仁**

1 Bosmans. Ferdinard Verbiest. Louvain，1912

**梅文鼎**

1 Martzloff J C. Recherches sur L'ceuvre Mathématique de Mei Wending (1633～1721). Paris：Presses Universitaires de France，1981

2 李迪，郭世荣. 清代著名天文数学家梅文鼎. 上海：上海科学技术文献出版社，1988

**明安图及其《割图密率捷法》**

1 李迪. 蒙古族科学家明安图. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1978

2 Catherine Jami. Les Méthodes Rapides Pour la Trigonométrie et le Rapport Précis Cercle (1774). Paris，1990

3 李迪. 明安图传(蒙文). 赤峰：内蒙古科学技术出版社，1992(第六章为罗见今执笔)

4 罗见今.《割圆密率捷法》译著. 呼和浩特：内蒙古教育出版社，1998

**四、期刊及文集**

**期刊**

1 《自然科学史研究》，中国科学院自然科学史研究所、中国科学技术史学会。

2 《中国科技史料》，中国科学技术史学会。

3 《数学史研究》，日本数学史学会。

4 《Historia Mathematica》，International Commission the History of Mathematics。

5 《Chinese Science》，The International Society for the History of East Asian Science，Technology，and Medicine。

6 《科学史通讯》，台湾科学史学会。

7 《Philosophy and the History of Science》，(台湾)远流出版公司(Yuan-Liou Publishing Co. LTD)。

**连续性论文集**

1 《科学史集刊》(1～11)，中国科学院自然科学史研究所。

2 《中国数学史论文集》(一～四)，山东教育出版社。

3 《数学史研究文集》(一～六)，内蒙古大学出版社和九章出版社。

**其他论文集**

1 科技史文集(8)·数学史专辑. 上海：上海科学技术出版社

2 李俨. 中算史论丛(第一集～第五集). 北京：科学出版社

3 方豪. 方豪文录. 北京，1948

4 王重民，等. 徐光启纪念论文集. 北京：科学出版社，1963

5 杨翠华，黄一农. 近代中国科技史论集. 台北：中央研究院近代史研究所、新竹清华大学历史研究所，1991

6 山田庆儿，田中淡.《中國科學史國際会議：1987 京都シンポジウム》報告書. 京都：京都大學人文科學研究所，1992

7 席泽宗，吴德铎. 徐光启研究论文集. 上海：学林出版社，1986

8 Nathan Sivin. Science in Ancient China. Vermont: Ashgate Publishing Company，1995

9 莫德，朱恩宽. 欧几里得几何原本研究论文集. 海拉尔：内蒙古文化出版社，1995

10 刘钝，韩琦，等. 科史薪传. 沈阳：辽宁教育出版社，1997

11 梅荣照. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990

# 论文及文章

## 一、通论性论文

### 明代数学概论

1 李俨. 明代算学书志. 图书馆学季刊，1926，1(4)：667～682

2 李俨. 增修明代算学书志. 图书馆学季刊，1931，5(1)：2123～2138；李俨. 中算史论丛(第二集). 北京：科学出版社，1954. 86～102

3 杜石然. 明代数学及其社会背景. 自然科学史研究，1989，8(1)：9～16

4 梅荣照. 明清数学概论. 见：明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 1～20

5 金福. 对明代数学思想的几点分析. 见：数学史研究文集(第一辑). 1990. 94～103

6 骆祖英. 明代数学及其评价. 自然科学史研究. 1998，17(4)：330～337

### 明末西方对中国数学之影响

1 Peterson W J. Western Natural Philosophy in Late Ming China. Proc. Amer. Phil. Soci. 1973，117(4)：295～322

2 许康，张杰恒. 从科技管理角度看明末对西方数学、历法和火器的引进问题. 见：数学史研究文集(第五辑). [出版者不详]，1993. 42～49

3 Shang Zhicong (尚智丛). The Ideological Trend of "Zhishengism" and the Introduction of Western Mathematics into China at the End of Ming Dynasty. Proceedings of the Cultural History of Mathematics，1994，4：74～79

4 根源.明末西方天文数学传入时的中国社会结构与社会思潮. 内蒙古社会科学，1997(4)：66～68

**明末清初西方数学传入一般论述**

1 张荫麟. 明清之际西算输入中国考略. 清华学报. 1924，1(1)：38～69

2 李俨. 明清之际西算输入中国年表. 图书馆学季刊，1927，2(1)：1～34；见：中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955，10～68

3 李垣田. 明末清初天主教士对于吾国天文学上之贡献. 新北辰，1936，2(8)：799～806

4 唐擘黄. 明末清初西来天算对清代学术之影响. 中山文化教育季刊，1936，3(3)：447～460

5 张维华. 明清之际西洋天文历算诸学传入中国之经过. 经世季刊，1941，1(4)：18～35

6 王萍. 西方历算之输入. 中央研究院近代史研究专利，1966，17：1～143

7 Yabuuti Kiyosi (薮内清). The Main Carrent of Chinese Science in the 17th and 18th Century. IIPI ∑MATA. Wiesbaden，1977，449～456

8 张惠民. 明末清初耶稣会士在西算输中的重要作用. 西北大学学报(自然科学版)，1985(1)：110～119

9 何凤魁，梁宗巨. 明清之际西方数学的传入及对中国数学发展的影响. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，1986(数学史专刊)：35～41

10 辛哲. 中国引进西方数学的背景、途径与作用. 曲阜师范大学学报(自然科学版)，1989，15(3)：96～102

11 Catherine Jami. Western Mathematics in China Seventeenth and Nineteenth Century. Sciences and Empires-

Historical Studies-Boston Studies in the Philosophy of Science-Ed, Kluwer Academic Publisher, 1989

12 Carine Chemla. Du parallélism enter enonces mathematiques. Revue d'Histoire des Sciences, 1990, XLⅢ(1): 58～80

13 严敦杰. 明清之际西方传入我国之历算记录. 见：明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 114～181

14 Catherine Jami. Scholars and Mathematical Knoledge during the Late Ming and Early Qing. Historia Scientiarum, 1991, 42: 99～109

15 Du Shiran and Han Qi(杜石然，韩琦). The Contribution of France Jesuils to Chinese Science in the Seventeenth and Eighteenth Centuries. Impact of Science on Society, 1992, 167: 265～275; 1993, 167(3): 55～64

16 Catherine Jami. Classification en Mathematiques vne par les lettes chinois (XVlle et XVllle siecles): tradition chinoise et contribution europćanne. L'Europe en Chine, 1992. 147～167

17 Jean-Claude Martzloff. Space and Time in Chinese Texts of Astronomy and Mathematical Astronomy in the Seventeenth and Eighteenth Centuries. Chinese Science, 1994, 11: 66～92

18 李迪. 17～19世纪中德数学关系史. 见：内蒙古数学会第五届年会论文集及史志. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1995. 5～13

19 詹嘉玲(C. Jami). 17～18世纪中国人眼中的数学史. 科史薪传. 沈阳：辽宁教育出版社，1997. 46～60

20 韩琦. 17～18世纪欧洲和中国的科学关系——以英国皇家学会和在华耶稣会士的交流为例. 自然辩证法通讯，1997，19

(3)：47～56

**西方著作之传入中国及汉译底本**

1 方豪. 明季西书七千部流入中国考. 文史杂志，1943，3(4)；见：方豪文录；见：中外交通史论丛(第一辑)

2 裴化行. 欧洲著作汉文译本. 冯承钧译. 华裔学志，1945；见：西域南海史地考证译丛第六编

3 方豪. 明清译著底本的发现和研究. 大公报(津版)，1947-11-21(图书周刊30期)；1947-11-29(图书周刊31期)；见：方豪文录

4 严敦杰. 古希腊译著之介绍(明清之际西算输入我国新史料(一)). 上智编译馆馆刊，1948，3(6)：229～233

**《崇祯历书》与《西洋新法历书》**

1 徐宗泽. 崇祯历书. 圣教杂志，1938，27(6)

2 裴化行(Henri Bernard). 崇祯历书考，1938，3(12)：35～77(连续页为441～527)

3 方豪. 顺治刻本西洋新法历书四种题记. 东方杂志，40(8)：19～21；见：方豪文录

4 薄树人. 崇祯历书. 社会科学战线，1980(2)：267～272

5 桥本敬造. 「崇禎曆書」の成立と「科學革命」. 關西大學社会學部纪要，1981，12(12)：67～84

6 江晓原.《崇祯历书》的前前后后. 中国典籍与文化，1996(4)：55～59；1997(2)：112～116

**二、明末人物及其相关问题(不包括徐光启)**

**利玛窦**

1 高鲁. 利玛窦来华始末记. 观象丛报，1919，4(11)：1～4；1919，4(12)：9～12

2 国安. 利玛窦来华之前后. 清华周刊，1930，31(1)：27～38

3 朱佐豪译. 利公玛窦小传. 圣教杂志，1932，21(9)：529～533

4 李一鸥. 利玛窦年谱初稿. 磐石杂志，1935，3(8)：437～444；1935，3(9)：513～519

5 裴化行. 利玛窦的科学教育. 新北辰，1935，1(9)：941～952

6 裴化行. 利玛窦和中国的科学. 新北辰，1935，1(10)：1055～1068

7 中村久次郎. 利玛窦传. 周一良译. 禹贡半月刊，1936，5(3)(4)：73～96

8 Henri Bernard. 利玛窦对西欧科学与艺术的输入. 舜华译. 工商学志，8(1)：72～84

9 裴化行. 利玛窦与东方科学. 汪宇平译. 时与潮副刊，1942，1(2)：76～78

10 吴寿彭. 利玛窦传. 学艺，1947，17(3)：8～17

11 冯天瑜. 利玛窦等耶稣会士在华学术活动. 江汉论坛，1979(4)：68～76

12 Jean-Claude Martzloff. Matteo Ricci's Mathematical Works and their Influnce. In Int, Symp. on Chinese-Western Cultural Interchange in Commemoretion of the 400th Anniversary of the Arrival of Matteo Ricci S. J. in China. Taipei：辅仁大学出版社，1983. 889～895

**李之藻(李我存)**

1 陈垣. 李之藻传. 国学，1926，1(3)：1～9

2 陈援庵(陈垣). 明代开教名贤之一李我存先生传略. 我存杂志，1933，1(11)：36～44

3 徐宗泽. 李之藻的名理探. 圣教杂志，1933，22(4)：149～201

4 方豪．李我存杨淇园二先生传略．我存杂志，1937，5(2)：扉页

5 徐景贤，杨堤．李我存先生故事．我存杂志，1937，5(5)：268～271

6 方豪．李之藻故居．(重庆)益世报，1942-02-17(4)(文史副刊1期)

7 Leung，Philip Yuen-sang. Li Zhizao's Search for a Confucian-Christian Synthesis. Ming Studies，1989，28：1～14

**汤若望**

1 高鲁．汤若望事略．观象丛报，1919，5(1)：1～6

2 Henri Bernard. L'encyclopédie astronomiques du Pére Sca (Tch'ong-tcheng li-chou 崇祯历书，1629 ed Siyang sin-fa li shu 西洋新法历书．1645). Monumenta Serica，1938，3：35～77(连续页为441～521)

3 仲群．明末清初传教士传略——汤若望传．圣教杂志，1934，23(1)：23～30

4 梁志廉．汤若望司铎年谱．磐石杂志，1934，2(9)：11～18；1934，2(10)：29～34；1934，2(11)：20～24

5 曹京实．汤若望与中国天历．中德学志，1943，5(1)(2)：278～309

6 方豪．汤若望汉名之来历．(津版)大公报，1947-11-14(文史周刊40期)

7 田凤台．汤若望与中华文化．东方杂志复刊(台湾)，1981，15(2)：34～39

8 陆敬严，钱学英，童瑞清．中德科技交流的先驱——汤若望．中国科技史料．1993，14(2)：36～42

9 王渝生．“通玄教师”汤若望．自然辩证法通讯，1993(2)：62～76

**龙华民、邓玉涵与罗雅谷**

1　仲群．明末清初传教士传略——龙华民传．圣教杂志，1934，23(3)：141～145

2　仲群．明末清初传教士传略——邓玉涵传．圣教杂志，1934，23(7)：549～551

3　仲群．明末清初传教士传略——罗雅谷传．圣教杂志，1934，23(7)：546～549

**孙元化及其著作**

1　宋伯胤．孙元化著述考略．上智编译馆馆刊，1948，3(2)：77～79

2　胡道静．孙元化著述目．见：薄树人编．中国传统科技文化探胜．北京：科学出版社，1992．27～29

3　尚智丛．《太西算要》研究．内蒙古大学学报(人文社会科学版)，1997(6)：81～86

4　尚智丛．《太西算要》发掘与探析．中国科技史料．1998，19(3)：80～86

**三、徐光启**

**传记及思想方法**

1　黄节．徐光启传．国粹学报，1906，2(7)：7～11；圣教杂志，1934，23(6)：327～331

2　徐景贤．书徐文定公事．圣教杂志，1931，20(7)：401～410

3　陈展云．划时代的徐文定公．宇宙，1933，4(8)：136～146；圣教杂志，1934，23(6)：364～369

4　蔡元培．追念徐文定介绍西学之功．宇宙，1933，4(8)：125～126

5　徐景贤，严肃．明贤徐文定三百周年纪念．磐石杂志，1933，1(4)：27～32；人文，1933，4(7)：1～11

6　余青松. 徐光启逝世300周年纪念会开会词. 宇宙，1933，4(8)：126～128

7　高鲁. 徐文定逝世300周年纪念感言. 宇宙，1933，4(8)：128～133

8　竺可桢. 纪念明末先哲徐文定公. 宇宙，1933，4(8)：133～136；圣教杂志，1934，23(6)：362～364

9　金兆梓. 徐文定公300年纪念. 新中华，1933，1(24)：29～34；圣教杂志，1934，23(6)：385～395

10　马相伯. 徐文定公与中国科学. 科学，1935，17(11)：1808～1809；圣教杂志，1934，23(7)：414～415

11　徐宗泽. 奉教阁老的传略. 圣教杂志，1933，22(11)：9～19

12　徐宗泽. 奉教阁老与科学. 圣教杂志，1933，22(11)：58～63

13　裴司铎①. 现代中国文化之前驱徐光启. 赵石经译. 圣教杂志，1933，22(11)：63～72

14　丁宗杰. 徐光启与利玛窦. 圣教杂志，1933，22(11)：52～57；国风，1934，4(1)：11～15

15　徐景贤，严肃. 徐光启对中国近代教育之贡献. 东方杂志，1933，30(24)：12～16

16　向达. 徐光启逝世300周年纪念. 国风，1934，4(1)：8～9；圣教杂志，1934，23(6)：342～344

17　李书华. 徐光启逝世300周年纪念日感言. 国风，1934，4(1)：3～6；圣教杂志，1934，23(6)：347～351

18　张百禄. 徐文定公300周年演说词. 圣教杂志，1934，23(1)：18～22

---

① 即裴化行，Henri Bernard。

19 竺可桢. 明代科学先驱徐光启. 申报月刊，1934，3(3)：73～78；圣教杂志，1934，23(6)：332～342；交大季刊，1934(14)：97～106

20 陈彬和. 徐文定公300周年纪念. 圣教杂志，1934，23(6)：344～347

21 柏应理[1]. 徐光启行略. 张星曜编次. 圣教杂志，1934，23(6)：322～327

22 徐景贤. 明贤徐文定公年谱初编. 国风，1934，4(5)：1～20；1934，4(6)：21～36

23 楚. 徐文定公逝世300年纪念. 圣教杂志，1934，23(7)：395～399

24 慈. 徐光启逝世300年纪念. 圣教杂志，1934，23(7)：399～402

25 陆征祥. 徐光启. 新北辰，1935，1(2)：137～150

26 徐宗泽. 徐文定之科学观. 圣教杂志，1936，25(10)：578～582

27 徐景贤，杨堤. 徐光启之精神生活. 江苏教育，1936，5(11)：22～24

28 王愚. 明代倡导科学的宰相徐光启. 人文杂志，1948(1)：18～20

29 习尧. 重视科学实验的徐光启. 文汇报，1962-01-17(2)

30 席泽宗. 爱国科学家徐光启. 工人日报，1962-04-19

31 辛树帜. 纪念徐光启. 光明日报，1962-04-19(2)

32 王有三. 我国伟大科学家徐光启的一生. 文汇报，1962-04-22(3)

33 贵芳. 爱国科学家徐光启. 解放日报，1962-04-23(4)

---

① 柏应理即比利时传教士 Philippe Couplet(1623～1692)，1658年来华。

34 李珩. 我国科学事业的先驱者——纪念徐光启诞生400周年. 解放日报，1962-04-24(4)

35 夏莨. 徐光启的治学精神. 天津日报，1962-04-24(4)

36 王重民. 爱国科学家徐光启. 中国青年报，1962-04-24(4)

37 王重民. 徐光启在我国科学史上的成就和贡献——纪念徐光启诞生400周年. 文汇报，1962-04-24(3)

38 胡道静. 爱国科学家徐光启. 科学大众，1962(4)：102～103

39 潘吉星. 杰出的科学家徐光启. 辽宁日报，1962-05-01

40 伍学源. 徐光启在农学和历法方面的成就. 北京师范大学学报(自然科学版)，1975(2)：94～99

41 北京师范大学数学系理论学习小组. 徐光启和崇洋媚外思潮. 北京师范大学学报(自然科学版)，1975(2)：100～109

42 上海灯泡厂工人理论学习小组自然辩证法组，中国科学院上海天文台天文史组. 徐光启与崇祯历书. 天文参考资料，1975(4)：1～21

43 北京师范大学数学系理论学习小组. 再评徐光启. 北京师范大学学报(自然科学版)，1976(2)(3)：164～196

44 李兴盛. 徐光启的科学成就和治学态度. 黑龙江日报，1978-05-27(3)

45 王永厚. 重视科学实验的徐光启. 光明日报，1978-06-18

46 冯佐哲. 明代杰出科学家徐光启. 北京日报，1978-10-04

47 王瑞明. 我国杰出的近代科学先驱者徐光启. 华中师范学院学报(自然科学版)，1979(3)：125～129

48 陈江. 明代著名科学家徐光启. 人物，1980(3)

49 施宣圆. 徐光启与西方科学. 随笔，1980(10)

50 施宣圆. 徐光启与西方科学. 农业考古，1982 (3)：174

～179

51　顾延培．传播西洋科学文化的先驱——明代大科学家徐光启．科学与生活(天津)，1982(2)

52　吴德铎．毕生献身科学的徐光启．自然杂志，1982(3)

53　施宣圆．徐光启的科学思想．史学月刊，1983(5)

54　席泽宗．明末爱国学者徐光启．光明日报，1983-10-28

55　梁家勉．徐光启的治学精神．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．1～3

56　王鹏．没落封建王朝的伟大爱国者．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．4～14

57　卞僧慧．试论徐光启的历史地位．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．15～23

58　高建．试论徐光启的科学道路．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．24～32

59　武仁．徐光启：中西科学第一个交点．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．33～36

60　梅荣照，王渝生．徐光启的数学思想．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．37～44

61　亓方．徐光启数学观浅析．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．45～48

62　陈晓中．徐光启的天文历法思想．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．66～70

63　何妙福，薛道远．徐光启的天文学研究方法．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．71～75

64　董英哲．徐光启的哲学思想．西北大学学报(社会科学版)，1988，18(2)：101～110

**科学工作与成就**

1　潘光旦．徐光启与天文历算科学——徐文定300年祭后．

申报，1933-11-23；华年周刊，1933，2(48)；圣教杂志，1934，23(6)：352～358

2 高平子．徐光启和我国最大一次的改历运动．新时代，1962，2(10)；恒毅，1962，12(4)；见：高平子天文历学论著选．台北：中央研究院数学研究所，1987．352～355

3 黎正甫．明季修改历法始末．大陆杂志，12(10)(11)(12)

4 薄树人．徐光启的天文工作．见：徐光启纪念论文集．北京：中华书局，1963．110～142

5 梅荣照．徐光启的数学工作．见：徐光启纪念文集．北京：中华书局，1963．143～161

6 王庆余．论徐光启介绍西方火山学的贡献．自然杂志，1982(6)

7 王庆余．徐光启对地磁学的贡献．自然杂志，1984(1)

8 伊世同．徐光启和晚明仪象．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．76～82

9 陈久金．徐光启和《崇祯历书》．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．83～91

10 潘鼐，王庆余．《崇祯历书》中的恒星图表．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．92～99

11 王庆余．徐光启与炮台建筑．见：徐光启研究论文集．上海：学林出版社，1986．182～186

**著作及其他(农学除外)**

1 徐景贤．徐光启著述考略．新月，1928，1(8)：1～14

2 徐景贤．奉教阁老的著作．圣教杂志，1933，22(11)：77～87；国风，1934，4(1)：16～24

3 徐宗泽．奉教阁老著作的存佚．圣教杂志，1933，22(11)：87～91

4 徐景贤. 徐文定公奏议四表叙. 圣教杂志，1934，23(7)：409～414

5 徐宗泽. 徐文定诗文目. 上智编译馆馆刊，1948，3(3)(4)：146～148

6 顾延培. 明代上海科学家徐光启的遗迹. 解放日报，1962-01-14(4)

7 林星垣. 徐光启的故居及祠墓. 文物，1962(3)：53～54

8 徐垣. 关于徐光启著作中一个可疑的书名. 光明日报，1962-06-02

9 余萱. 徐光启遗迹. 新民晚报，1963-11-26(3).

10 吴贵芳，周美珍. 徐光启手迹二种. 文物，1977(9)：64～67

11 李文铭. 抄本《定法平方算术》不是徐光启的著作. 图书馆杂志，1984(11)：56～57

12 王庆余. 关于《定法平方算术》的几个问题. 图书馆杂志，1984(11)：58～60

## 四、明末之具体研究与交流

### 具体研究

同文算指

1 武田南雄. 同文算指の成立. 科学史研究，1954，30：7～14

2 土仓保. 「同文算指」开平方. 数学教育研究(日本大阪教育大学数学教室)，1996,26：185～188

罗雅谷之传译

1 严敦杰. 罗雅谷比例规解之蓝本. 上智编译馆馆刊，1948，3(3)(4)：130～133

2 林新贤. 罗雅谷传译历学新法的特征——以《五纬历指》土星历为例. 见：近代中国科技史论集. 台北：中央研究院近代

史研究所等，1991. 95～128

大测

1　白尚恕. 介绍我国第一部三角学——“大测”. 数学通报，1963(2)：48～封底

测量全义

1　白尚恕.《测量全义》底本问题的初探. 科学史集刊，1984(11)：143～159

**交流**

伽利略

1　方豪. 伽利略与科学输入我国之关系. 思想与时代，1942(15)：27～33；见：中外文化交通史论丛(第一辑)；见：方豪文录.

2　方豪. 伽利略与中国关系的新资料. 科学技术月刊，1943，1(2)：84～87

3　严敦杰. 伽利略的工作早期在中国的传布. 科学史集刊，1964(7)：8～27

Longomontanus[①]

1　Keizo Hashimoto. Longomontanus's Astronomia Danica in China. Journal for the History of Astronomy，1987，18(8)：95～110［中译为：隆哥蒙塔努斯的《丹麦天文学》在中国的影响. 科学史译丛，1988(3)：1～3］

本多利明

1　小林龍彦. 本多利明の三角法と漢譯西洋新法算書との関係について. 科學史研究，1992，31(2)：200～208

① Longomontanus，即 Christian Severin（1562～1647），丹麦天文学家，著《Astronomia Danica》（丹麦天文学）一书。

Aleni

1 Catherine Jami. Aleni's Contribution to Geometry in China：A Study of the Jihe Yaofa 幾何要法. 见：中國技术史の研究. 京都：京都大學人文科學研究所，1998. 775～796

**五、几何原本**

**译传通史**

1 刘朝阳. 几何原本. 国立中山大学语言历史研究所周刊，1928，5(52)：17～20

2 陈胜昆. 徐光启与李善兰——几何原本的翻译. 科学月刊，1975，6(4)

3 Jean-Claude Martzloff. La compréhension Chinoise des methodes euclidiennes au cours du XⅦ siecle et au début du XⅧ é. Actes du Ⅱe Colleque International de Sinologie. Les rapportes entre la Chine et l'Europe au termps des Lumières. Paris：Las Belles Letters，1980. 125～143

4 田千兴. 我国翻译欧几里得几何史略. 怀化师专学报(自然科学版)，1984(1)：53～56

5 何艾生，梁成瑞. 《几何原本》及其在中国的传播. 中国科技史料，1984，5(3)：32～42

6 梅荣照，王渝生，刘钝. 欧几里得《原本》的传入和对我国明清数学发展的影响. 见：徐光启研究论文集. 上海：学林出版社，1986. 49～63

7 刘钝. 从徐光启到李善兰——以《几何原本》之完璧透视明清文化. 自然辩证法通讯，1989(3)：55～63

8 刘钝. 欧几里得《原本》的流传. 见：吴之静编. 科学：中国与世界. 北京：科学普及出版社，1992. 20～33

9 Catherine Jami. From Clavius to Pardies：The Geometry Transmitted to China By Jesuit (1607～1723). Time and Space

in Chinese Culture (Frederico Masini ed.), 1996. 175～199

**明译《几何原本》**

1　淳穆. 明万历原刻本《几何原本》. 文物周刊，1947(26)

2　毛子水. 徐光启与《几何原本》，中央日报，1962-10-01

3　毛子水. 徐译《几何原本》影印本导言. 书目季刊，1966(1)

4　罗杰(R. Hart).《几何原本》、神威大炮和“亚尼玛”(anima)——从科学知识的社会学的角度探讨17世纪西学之引入中国. 见：刘钝，韩琦，等. 科史薪传. 沈阳：辽宁教育出版社，1997. 84～96

**清代满文《几何原本》**

1　陈寅恪. 几何原本满文译本跋. 中央研究院历史语言研究所集刊，1931，2(3)：281～282

2　李兆华.《几何原本》满文抄本的来源. 故宫博物院院刊，1984(2)：67～69

3　莫德.《几何原本》有关问题研究(四)——几何原本满文抄本的内容及其成书过程. 内蒙古师范大学学报(自然科学版)，1989(科学史增刊)：24～28

**对《几何原本》之研究**

“几何”与“几何原本”之名称

1　严敦杰. 几何不是GEO的译音. 数学通报，1959(11)

2　桑杨.“几何”的名称从何而来. 青年报(上海)，1983-11-04

3　白尚恕.《几何原本》的名称及其他. 见：欧几里得几何原本研究. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1992. 217～234

4　白尚恕. 再论《几何原本》之名称. 北京师范大学学报(自然科学版)，1993，29(2)：270～275

前三卷的批校

1　许康，罗达雄.《几何原本》前三卷校本批校者质疑. 中国科技史料，1996，17(4)：83～87

比较研究

1　李迪.《九章算术》与《几何原本》. 见：《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982. 105～119；见：欧几里得几何原本研究论文集. 海拉尔：内蒙古文化出版社，1995. 91～107（题目改为"《九章算术》与《几何原本》之比较研究"）

2　尚智丛.《几何原本》与《九章算术》及其刘徽注中比例理论和运用之比较. 见：欧几里得几何原本研究. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1992. 217～234

3　郭树理，伦华祥. 刘徽与欧几里得的逻辑. 见：吴文俊编. 刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社，1993. 269～281

## 六、明清间之数学史研究

### 一般性论述

1　张恩龙. 明清两代来华外人考略. 图书馆学季刊，1930，4(3)(4)：447～472；1931，5(1)：83～104

2　曹增友. 法国在华传教士的科技活动及其影响. 中国科技史料，1991，12(3)：15～23

3　薛迪群. 明清时期上海的数学发展. 科学技术与辩证法，1995，12(3)：39～43

### 数学内容研究

1　李俨. 三角术及三角函数表之东来. 科学，1927，12(10)：1445～1493；见：中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955. 191～253

2　李俨. 明清算家之割圆术研究. 科学，1927，12(11)：1487～1520；1927，12(12)：1721～1766；1928，13(1)：53～102；1928，13(2)：201～250；见：中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，

1955. 254～512

3　李俨. 中算家的圆锥曲线说. 科学，1947，29(4)：115～120；见：中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955. 519～537

4　李俨. 中算家之九九加减术. 学艺，1952，24(4)：7～8；见：中算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955. 513～518

5　沈康身. 17～19 世纪我国球面三角学研究成果. 杭州大学学报(自然科学版)，1980(8)：48～49

6　沈康身. 我国古代球体几何知识的演进. 见：科技史文集(第 8 辑). 上海：上海科学技术出版社，1982. 128～143

7　严敦杰. 中算家之 Prosthaphaeresis 术. 见：明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，84～96

8　牛亚华. 明末清初椭圆知识的传入及应用. 见：数学史研究文集(第一辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1990. 104～116

9　王燮山. 关于明清之际杠杆力学问题的计算. 中国科技史料，1991，12(1)：53～62

10　郭世荣. 纳披尔算筹在中国的传播与发展. 中国科技史料，1997，18(1)：12～20

**西镜录**

1　严敦杰. 西镜录冥求. 中央日报(南京版)，1946-06-25(文史周刊 6 期)

2　严敦杰.《西镜录》跋. 自然科学史研究，1988，7(3)：214～217

**中日交流**

1　小林龍彦.《歴算全書》の三角法と《崇禎歴書》割圓八線之表の伝来たついて. 科學史研究，1990，29(2)：83～92

2　小林龍彦. 坂部広胖と球面三角法への数學の著想. 科學史研究，1995，34(2)：10～18

## 七、清初及康熙帝之数学工作

### 概论

1 李俨. 清代数学教育制度. 学艺，1934，13(4)：37～52；1934，13(5)：49～59；1934，13(6)：39～44；见：中算史论丛(第四集). 北京：科学出版社，1955. 281～320·

2 方豪. 康熙前钦天监以外研究天文之西人. 东方杂志，1943，39(10)：27～29

3 Catherine Jami. Western Influence and Chinese Tradition in the Eighteenth Century Chinese Mathematical Work. Historia Mathematica，1988，15(4)：311～331

4 金福. 清初改历斗争与康熙帝天算学术. 内蒙古师范大学学报(自然科学版)，1989(科学史增刊)：16～23

5 李迪. 清嘉庆末前关于满蒙天算人才的培养. 见：中国少数民族科技史研究(第四辑). 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1989. 37～53

6 刘钝. 清初民族思潮的嬗变及其对清代天文-数学的影响. 自然辩证法通讯，1991，13(3)：42～52

7 Catherine Jami. Learning Mathematical Science in the Early and Mid Ching. In：Education in Ching China (B. Elman and A. Woodside eds). Berkeley：University of California Press

### 康熙帝之工作

1 Rita H Peng. The Kangxi Emperor's Absorption in Western Mathematics and Astronomy and His Extensive Application of Scientific Knowledge. Li-Shih Hsueh-pao(历史学报)，1975(3)：349～442

2 白尚恕，李迪. 康熙帝读书炕桌. 故宫博物院院刊，1982(2)：70～73

3 李培业. 论康熙数学著作《积求勾股法》. 见：数学史研

究文集(第四辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993. 47～49

**与康熙帝相关的来华教士**

南怀仁

1 仲群. 明末清初传教士传略——南怀仁传. 圣教杂志，1934，23(2)：81～87

2 方豪. 南怀仁尺牍. 益世报，1942-12-11(文史副刊21期)

3 Ulrich J Libbrecht. The Astronomia European of Ferdimand Verbiest S J. 见：近代中国科技史论集，台北：中央研究院近代史研究所等，1991. 129～138

白晋(或白进)

莫言. 康熙皇帝派赴法特使白进. 东南日报(沪版)，1947-04-02(文史36期)

2 Gatty Janette. Les recherches de Joachim Bouvet (1656～1730). Actes Du Colloque International de Sinologie, La Mission Francoise de Peking aux XⅦe ed XⅧe siècles, Chantilly, 20～22, Sep. 1974. Paris: Les Belles-Lettres, 1976. 141～162

傅圣泽

1 Catherine Jami. Jean-Francois Foucquet et la Madernisation de la Science en Chine La "Nouvelle Methode d'Algebre". Master-thesis for the University of Paris. Sep. 1986.

2 Catherine Jami. The Conditions of Transmission of European Mthematics at the Time of Kangxi: J F Foucquet's Unsuccessful Attempt to Introduce Sympolic Algebra. Paper presented to 5th ICHCS 5～10. Aug. 1988. 徐义保译为中文：欧洲数学在康熙年间的传播情况. 见：数学史研究文集(第一辑). 呼

和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1990．117～122

3 Jean-Claude Martzloff. La science astronomique europeanne au sevice de la diffusion du catholicisme en Chine. L'oeuvre astronomique de Jean-Franois Foucquet(1665～1741). Mélanges de I' Ecole Française de Rome. Italie et Méditerranée tome 101～2，1989，973～989

4 Keizo Hashimoto, Catherine. Kepler's Laws in China：A Missing Link? Jean-Francois Foucquet's Lifa Wenda（历法问答）. Historia Scientiarum，1997，1：3～6

**《数理精蕴》与《律历渊源》**

数理精蕴

1 李兆华．关于《数理精蕴》的若干问题．内蒙古师范大学学报(自然科学版)，1983(2)：66～81

2 李兆华．《数理精蕴》介绍．中等数学，1985(2)：2～4

3 Catherine Jami. Classification en mathematiques：La structure de léncyclopédie *Yu zhi shu li jing yün* (1723). Revue d'Histoire des Sciences XLll-4，1989．391～406

4 Catherine Jami. The Yu Zhi shu Li Jing Yun 御制数理精蕴(1723) and Mathematics During the Kangxi Reign (1662～1722)．见：近代中国科技史论集．台北：中央研究院近代史研究所等，1991．155～172

5 刘钝．《数理精蕴》中《几何原本》的底本问题．中国科技史料，1991，12(3)：88～96

6 韩琦．《数理精蕴》对造表法与戴煦的二项展开式研究．自然科学史研究，1992，11(2)：109～119

律历渊源

1 川原秀城．《律历渊源》与河图洛书．见：科史薪传．沈阳：辽宁教育出版社，1997．36～47

**故宫博物院所藏科技文物与计算工具**

科技文物

1 李迪，白尚恕．故宫博物院所藏科技文物概述．中国科技史料，1981(1)：95～100

计算工具

1 严敦杰．故宫所藏清代计算仪器．文物，1962(3)：19～22

2 白尚恕，李迪．故宫珍藏的原始手摇计算器．故宫博物院院刊，1980(7)：76～82

3 李迪，白尚恕．康熙年间造的手摇计算器．见：中国数学史论文集(一)，济南：山东教育出版社，1985．52～57

4 Li Di，Bai Shangshu，Michel William R. Chinese Calculators Made During the Kangxi Rign in the Qing Dynasty. IEEE Annals of the History of Computing，1992，14(4)：63～67

5 Graf K D ，Bai Shangshu，Li Di. The Calculating Machines in the Place Museum in Bejing，Their Struecture and Algorithm. 13th World Computer Congress 94，Vol.2（K. Brunnsein and E.Raubold by Editors ），1994．315～323

**八、梅文鼎**

**传记及年谱**

传记

1 梅定九先生传．观象丛报，1915，1(1)：79～82

2 梅定九学历说．观象丛报，1915，1(6)：25～29

3 龚颠波．300 年前之算学大家——梅定九先生．学风，1930，1(2)：7～13

4 湛．梅文鼎诞生 300 年纪念．宇宙，1933，4(8)：147

5 梅文鼎(1633～1721)．学风，1935，5(3)：17～18

6 郑澄．伟大的数学家梅文鼎．数学教学，1957(8)：7～8

7　严敦杰．明清数学史中的两个论题——程大位和梅文鼎．安徽历史学报，1957(1)：48～52

8　李俨．梅文鼎的生平及其著作目录．安徽历史学报，1957(1)：93～94

9　杨迁之．梅文鼎——17世纪我国著名科学家．安徽日报，1960-10-29(3)；1960-11-08(3)

10　徐天芬．清代历算家梅文鼎．见：自然科学史、自然辩证法文集(第一辑)．上海：华东师范大学出版社，1984．100～113

11　刘钝．清初天算大师梅文鼎．自然辩证法通讯，1986(1)：52～64

12　刘钝，川原秀城．梅文鼎故里考察散记．数学史研究，通卷(116)

**年谱**

1　李俨．梅文鼎年谱．清华学报，1925，2(2)：609～634

2　钱宝琮．梅勿庵先生年谱．国立浙江大学季刊，1932，1(1)：11～44

3　商鸿逵．梅定九年谱．中法大学月刊，1932，2(1)：19～42

4　李俨．梅文鼎年谱补遗．中央日报，1946-08-21(文史周刊14期)；1946-08-27(文史周刊15期)

5　李俨．梅文鼎年谱．见：中算史论丛(第三集)．北京：科学出版社，1955．544～576

**思想方法**

1　梁庚尧．梅文鼎对西方历算学的态度．食货月刊，1977，复刊7(1)(2)：62～73

2　汤奇学．梅文鼎的中西文化观．东南文化，1991(2)

3　秦才富，范毓川．试论传统思维方式对梅文鼎数学研究的影响．安徽师范大学学报(自然科学版)，1993，16(科学史研究专

辑)：89～91

4　郭世荣. 梅文鼎的会通中西工作. 见：数学史研究文集(第六辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1998. 56～64

**研究工作和成就**

1　沈康身. 梅文鼎在立体几何上的几点创见. 杭州大学学报(自然科学版)，1962(1)：1～7

2　沈康身. 球面三角形的梅文鼎图解法. 数学通报，1965(5)：47～49，52

3　桥本敬造. 梅文鼎の歷算學——康熙年間の天文歷算學——. 東方學報，京都第41册，1970.，491～518

4　桥本敬造. 梅文鼎の数學研究. 東方學報，京都第48册，1973. 233～279

5　Jean-Claude Martzloff. La Géometrie euclidienne selon Mei Wending. Historia Scientiarum (Tokyo)，1981，21：27～42

6　梅荣照. 略论梅文鼎的《方程论》. 见：科技史文集(第8辑). 上海：上海科学技术出版社，1982. 144～158

7　刘钝. 托勒玫的“曷捺楞马”与梅文鼎的“三极通微”. 自然科学史研究，1986，5(1)：68～75

8　张素亮. 论梅文鼎数学研究的特点. 曲阜师范大学学报(自然科学版)，1988(3)：182～186

9　严敦杰. 梅文鼎的数学和天文学工作. 自然科学史研究，1989，8(2)：99～107

10　刘钝. 梅文鼎在几何学领域中的若干贡献. 见：明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 182～218

11　刘逸. 略论梅文鼎的投影理论. 自然科学史研究，1991，10(3)：223～229

12　刘逸. 再论梅文鼎的投影理论. 安徽师范大学学报(自然

科学版)，1993，16(科技史研究专辑)：54～60

**人际关系及其他**

人际关系

1 郭慕夫. 梅文鼎与耶稣会人士之关系. 上智编译馆馆刊，1948，3(6)：233～235

2 胡炳生. 试论安徽数学学派. 安徽师范大学学报(自然科学版)，1986(2)

3 胡炳生. 梅文鼎和清代畴人. 中国科技史料，1989，10(2)：12～19

4 郭世荣. 李光地对梅文鼎学术研究的支持与促进. 见：数学史研究文集(第二辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1991. 91～95

5 高宏林. 梅文鼎学派的主要成员孔林宗. 中国科技史料，1996，17(4)：24～28

其他

1 Michiwaki Y, Kobayashi T. Influence of “Li-suan Chan-shu” in Japanese Mathematics and Different Ways of Thinking Between Mei Wending and Japanese Mathematicians. 上武大学经营情报学部纪要，1989(1)：135～142

2 郭世荣. 程、梅、戴、汪诸家的数学和天文学工作——1986年以来的研究进展综述. 安徽师范大学学报(自然科学版)，1993，16(科技史研究专辑)：16～22

**九、明安图**

**传记**

1 李迪. 清初蒙古族数学家——明安图. 内蒙古日报，1957-10-21(3)

2 严敦杰. 明安图. 科学报，1959-09-25

3 李迪. 我国18世纪少数民族大数学家——明安图及其数

学成就. 内蒙古师范学院学报(自然科学版), 1960(1): 1～9

4 史筠. 清代科学家明安图族别考. 内蒙古日报, 1963-03-12(3)

5 史筠. 蒙古族科学家明安图. 内蒙古大学学报(社会科学版), 1963(1): 53～88

6 史筠. 明安图在钦天监50余年工作记略. 内蒙古大学学报(社会科学版), 1963(1): 89～101

7 阎崇年. 古代蒙古族科学家明安图. 科学实验, 1976(9): 17～19

8 李迪. 蒙古族科学家明安图. 光明日报, 1978-04-27

9 李茂高. 古代蒙古族数学家——明安图. 内蒙古日报, 1979-04-24

10 李迪. 卓越的蒙古族科学家明安图. 实践, 1979(7): 69～70

11 罗见今. 明安图是勇于创新的数学家. 西北民族学院学报(自然科学版), 1993, 14(2): 80～85

12 李迪. 明安图及其科学工作的背景. Proceedings of the Cultural History of Mathematics, 1994, 4: 79～90

**研究和贡献**

1 史筠. 蒙古族学者明安图在我国科学史上的贡献. 民族团结, 1964(69)(70): 38～44

2 李迪. 明安图在我国地图测绘方面的贡献. 内蒙古师范学院学报(自然科学版), 1964(1): 89～95

3 何绍庚. 明安图的级数回求法. 自然科学史研究, 1984, 3(3): 209～216

4 罗见今. 明安图是卡塔兰数的首创者. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1988(2): 239～245

5 罗见今. 明安图创卡塔兰数的方法分析. 内蒙古师范大学

学报(自然科学版)，1989(1)：29～40

6 罗见今. 明安图计算无穷级数的方法分析. 自然科学史研究，1990，9(3)：197～207

7 罗见今. 明安图的高位计算及其结果检验. 见：数学史研究文集(第二辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1991. 96～104

8 罗见今. 论明安图级数反演中的计算结构. 内蒙古师范大学学报(自然科学版)，1992(3)：91～102

9 Luo J J(罗见今). Catalan Numbers in the History of Mathematics in China. Combinatorics and Graph Theory (Proceedings of the Spring School and International Conference on Combinatorics )(World Scientific)，1993. 68～70

10 特古斯. 再论明安图的割圆连比例法. 见：第三届中国少数民族科技史国际学术讨论会论文集. 昆明：云南科技出版社，1998. 134～139

**其他**

1 敖日金. 从《割圆密率捷法》探讨明安图的科学研究方法. 见：中国少数民族科技史研究(第二辑). 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1988. 43～49

2 王艳玉. 明安图及其《割圆密率捷法》研究史. 见：中国少数民族科技史研究(第二辑). 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1988. 52～62

3 李迪.《割圆密率捷法》残稿本的发现. 自然科学史研究，1996，15(3)：234～238

## 十、清代乾隆中期以前之某些研究

**专题研究**

1 李俨. 对数之发明及其东来. 科学，1927. 12(2)：109～158；1927，12(3)：285～325；1927，12(6)：689～700；见：中

算史论丛(第三集). 北京：科学出版社，1955

2 三上义夫. 清朝時代の割圆术の発達に関すう一考察上、下. 東洋學報，1930，18(3)；18(4)

3 桥本敬造. 歴象考成の成立. 见：明清科学技术史. 京都：京都大学人文科学研究所，1970. 491～518

4 桥本敬造. 椭圆法の展开—— 「歴象考成后編」の内容について——. 東方學報，1971，京都第42册：245～272

5 薄树人. 清代对刻普勒方程的研究. 见：王立兴编. 中国天文学史文集. 北京：科学出版社，1984. 97～116

7 何绍庚. 清代无穷级数研究中的一个关键问题. 自然科学史研究，1989，8(3)：205～214

8 冯立升. 清代对球及其部分的体积和表面积问题的研究. 见：数学史研究文集(第二辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1991. 113～122

9 特古斯. 试论清代割圆连比例方法. 自然科学史研究，1996，15(4)：219～225

**人物及其工作**

王锡阐

1 席泽宗. 王锡阐的严谨治学态度. 科学报，1962-01-31 (4)

2 席泽宗. 试论王锡阐的天文工作. 科学史集刊，1963 (6)：53～65

3 Nathan Sivin. Wang Hsi-Shan. In：Dictionary of Scientific Biography 14. New York：American Council of Learned Societies，1976. 159～168；Science in Ancient China，Variorum，1995，V，有些修改.

4 江晓原. 王锡阐及其《晓庵新法》. 中国科技史料，1986，7(6)：48～51

5 江晓原. 王锡阐的生平、思想和天文学活动. 自然辩证法通讯，1989，11(4)：53～62

6 梅荣照. 王锡阐的数学著作——《圆解》. 见：明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 97～113

7 宫岛一彦. 王锡阐《晓庵新法》の太阳係モテル. 见：中国古代科学史论续篇. 京都：京都大学人文科学研究所，1991. 243～266

8 薛斌. 王锡阐年谱. 中国科技史料，1997，18(4)：28～36

薛凤祚

1 袁兆桐. 清初山东科学家薛凤祚. 中国科技史料，1984，5(2)：88～92

方中通

1 严敦杰. 方中通《数度衍》评述. 安徽史学，1960(创刊号)：52～57

孔林宗

1 高宏林. 略论孔林宗的数学成就. 见：数学史研究文集(第五辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993. 58～63

李子金

1 高宏林. 清初数学家李子金. 中国科技史料，1990，11(1)：30～35

2 高宏林. 李子金《弧矢象限表》研究. 见：数学史研究文集(第四辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1993. 42～46

3 高宏林. 李子金关于三角函数造表法的研究. 自然科学史研究，1998，17(4)：338～347

杜知耕

1　高宏林．清初数学家杜知耕．见：李广瑞编．宋州古今学人．商丘：新华出版社，1989．191～197

2　Jean-Claude Martzloff. E'lements de reflexion sur les réactions chinoise *à* la geometrie Euclidienne *à* la du ⅩⅦe siècle-le Jehe Lunyue de Du Zhigeng vu principalement *à* partir de la prélace de préface de láuteur et de deux notices bibliographiques rédigress pal lattrés illustres. Historia Mattematica，1993，20(2)：160～170；1993，20(3)：460～463

年希尧及其《视学》

1　李迪．我国第一部画法几何著作《视学》．内蒙古师范学院学报(自然科学版)，1979(1)：1～17.

2　沈康身．界画、《视学》和透视学．见：杭州大学庆祝建国 30 周年科学报告会论文集(数学系分册)．杭州：杭州大学，1979．58～59

3　沈康身．界画、《视学》和透视学．科技史文集(第 8 辑)，上海：上海科学技术出版社，1982．159～176

4　沈康身．从《视学》看 18 世纪东西方透视学知识的交融和影响．自然科学史研究，1985，4(3)：258～266

5　沈康身．波德拉《透视学史》与年希尧《视学》．科学探索，1987，7(1)：206～216

6　沈康身．《视学》透视量点法作图题选析．见：中国数学史论文集(四)．[出版者不详]，1996．104～113

7　沈康身．年希尧《视学》的研究．见：近代中国科技史论集．[出版者不详]，1991．173～194

8　沈康身．《视学》再析．自然，1991，19(8)：605～610

**其他**

1　洪焕春．余姚黄宗羲著述目．浙江通志馆馆刊，1946，2(1)：32～40

2　伯莹.《数度衍》中的八阵图. 琅琊珠算，1983(5)：9

3　萨仁图雅. 蒙古“珠尔海”四则运算. 见：中国少数民族科技史研究(第二辑). 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1988. 52～71

4　斯登，苏瓦迪，萨仁图雅. 最早的蒙文三角学著作——《八线表》. 见：数学史研究文集(第三辑). 呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1992. 66～71

5　李培业.《陈厚耀算书》研究. 见：数学史研究文集(第三辑). 见：呼和浩特：内蒙古大学出版社和九章出版社，1992. 72～77

6　严敦杰. 清代数学家梅珏成在数学史上的贡献. 安徽史学通讯，1959(9)：1～5

7　严敦杰. 方中通《数学衍》述评. 安徽史学，1960(1)：52～57

# 人 名 索 引

## A



## B

## C

# D



# F

# G

# H



# J

## K



## L

## M

# N

# O



# P



# Q

## R



## S



---

① 沈括生卒年有多种说法，此为其中之一。

# T



# W

# X

## Y

# Z